

제2장 수학적 기초

제2장에서는 회로이론을 배우는데 필요한 수학지식에 대하여 기술하였다. 고등학교에서 배운 행렬과 그의 연산, 복소수, 여러 가지의 함수, 삼각함수, 미분, 적분에 관한 지식은 공학에서 문제를 해결하는 도구로 이용되므로 공식과 정리를 중심으로 간단히 기술하였다. 또한 고등학교에서 배우지 않은 미분방정식의 해를 구하는 방법에 대하여도 기술하였으며, 이 장의 주요 내용은 다음과 같다.

2.1 행렬과 그의 연산

2.1.1 행렬의 뜻과 용어의 정의

2.1.2 행렬의 연산

2.1.3 연립 1차방정식

2.1.4 역행렬

2.2 복소수, 복소변수와 복소함수

2.2.1 복소수와 복소평면

2.2.2 복소수의 표현법

2.2.3 복소수의 연산

2.2.4 복소변수, 복소함수와 해석함수

2.2.5 복소함수의 극과 영점

2.3 삼각함수의 기초

2.4 함수와 그래프

2.5 미분

2.5.1 함수의 극한

2.5.2 연속함수

2.5.3 변화율과 도함수

2.5.4 미분법과 여러 가지 함수의 도함수

2.5.5 고차도함수

2.5.6 도함수의 응용

2.5.6.1 곡선의 접선

2.5.6.2 속도와 가속도

2.5.6.3 함수의 증감과 극대·극소

2.6 적분

2.6.1 부정적분

2.6.2 치환적분

2.6.3 부분적분

2.6.4 정적분

2.7 미분방정식

2.7.1 제차 선형미분방정식의 해

2.7.2 비제차 선형미분방정식의 해

2.1 행렬과 그 연산

2.1.1 행렬의 뜻과 용어의 정의

수나 문자를 소괄호, 중괄호 또는 대괄호 안에 직사각형의 꼴로 배열한 것을 **행렬(matrix)**이라 하고, 행렬을 이루는 각각의 수나 문자를 행렬의 **원소** 또는 **성분(element)**이라고 한다. 일반적으로, 다음의 식(2.1-1)과 같이 행렬을 인쇄체 대문자로 나타내고 원소는 숫자나 필기체 소문자로 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (2.1-1)$$

가로의 줄을 행렬의 **행(row)**이라 하고, 세로의 줄을 행렬의 **열(column)**이라고 하며, m 행 n 열로 이루어진 행렬을 $m \times n$ 행렬이라고 부른다. 행렬 A 의 제 i 행과 제 j 열의 교차점에 위치하는 성분을 이 행렬의 (i, j) 성분 또는 (i, j) 원소라 하고 a_{ij} 로 나타낸다.

행렬과 관련된 용어의 정의에 대하여 살펴보자.

행렬의 차수(order of a matrix) : 행렬의 차수(order)는 행렬의 행의 수와 열의 수를 나타낸다. m 행 n 열로 이루어진 행렬을 $m \times n$ 행렬이라고 부른다. 예를 들면, 식(2.1-1)의 행렬의 차수는 2×3 이며 2×3 행렬이라 부른다.

행벡터(row vector) : 단 하나의 행(row)만을 갖는 행렬

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

을 행행렬(row matrix) 또는 행벡터(row vector)라 한다.

열벡터(column vector) : 단 하나의 열(column)만을 갖는 행렬

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

을 열행렬(column matrix) 또는 열벡터(column vector)라 한다.

0행렬(null matrix) : 모든 원소의 값이 0인 행렬을 **0행렬(null matrix)**이라고 하고 0으로 나타낸다. 예를 들면,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

는 0행렬이다.

정방행렬(square matrix) : 행의 수와 열의 수가 같은 행렬을 **정방행렬(square matrix)**이라고 부른다. 예를 들면,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

는 정방행렬이다.

대각행렬(diagonal matrix) : 정방행렬 $A = (a_{ij})$ 의 주대각선의 상부와 하부에 있는 원소가 모두 0인 행렬, 즉, $i \neq j$ 에 대하여 $a_{ij} = 0$ 인 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)이라고 한다. 예를 들면,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

는 대각행렬이다.

단위행렬(unit matrix) : 주대각선상의 원소가 모두 1인 대각행렬을 단위행렬이라고 한다. 즉, 모든 i, j 에 대하여, $i=j$ 일 때 $I_{ij}=1$ 이고, $i \neq j$ 일 때 $I_{ij}=0$ 인 정방행렬을 **단위행렬(unit matrix)**이라고 하며 I 로 나타낸다. 예를들면,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

는 단위행렬이다.

대칭행렬(symmetric matrix) : 정방행렬 $A = (a_{ij})$ 중에서, $i \neq j$ 에 대하여 $a_{ij} = a_{ji}$ 인 행렬을 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다. 예를들면,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

는 대칭행렬이다. **대칭행렬**은 $A^T = A$ 인 행렬로 정의할 수 있다.

전치행렬(transpose of a matrix) : $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 의 전치행렬 A^T 는 A 의 행과 열을 교환함으로써 얻어진 $n \times m$ 행렬이다. 즉, A 의 i 번째 행은 A^T 의 i 번째 열이 된다. 예를들면,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{일 때, } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{이고, } B = [1 \ 2 \ 3] \text{일 때, } B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{이다. 전치행렬의 성질}$$

로서 $(A^T)^T = A$ 인 사실과 $(A+B)^T = A^T + B^T$ 인 사실을 기억해 두기 바란다.

행렬의 상등(equality of matrices) : 두 행렬 $A = (a_{ij})$ 와 $B = (b_{ij})$ 가 같은 수의 행과 열을 갖고, 대응하는 원소가 같을 때, 즉, 모든 i, j 에 대하여 $a_{ij} = b_{ij}$ 일 때, A 와 B 는 상등하다 또는 같다(equal)고 하고, $A = B$ 라 쓴다.

행렬의 계수(rank) : 행렬 A 의 계수(rank)는 A 의 1차독립인 행벡터의 최대수 또는 A 에 포함되어 있는 정칙행렬(singular)의 최대 차수이다. 예를 들어, 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 계수(rank)는 1이다. 왜냐하면, 첫 번째 행과 두 번째 행은 같으므로 서로 종속이다. 따라서 서로 독립인 행의 수는 1개이고 주어진 행렬

의 계수는 1이다. 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 의 계수는 2이고, 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ 의 계수는 2이다. 왜냐하면, 세 번째

행은 첫 번째 행과 두 번째 행의 합과 같으므로 서로 독립인 행의 개수는 2이기 때문이다. 행렬

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 4 & 9 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 의 계수는 2이다. 왜냐하면, 세 번째 행은 서로 독립인 첫 번째 행과 두 번째 행의 1

차결합이기 때문이다. 즉, 첫 번째 행을 2배한 것에서 두 번째 행을 뺀 것과 같기 때문이다.

다음의 성질들은 행렬의 계수를 구하는데 도움이 된다.

- ① A 의 계수와 A^T 의 계수는 같다.
- ② A 의 계수와 $A^T A$ 의 계수는 같다.
- ③ A 의 계수와 AA^T 의 계수는 같다.

2.1.2 행렬의 연산

이제 행렬의 대수연산으로 행렬의 덧셈과 뺄셈, 행렬의 상수곱, 행렬의 곱셈에 대하여 살펴보자. 역행렬에 대하여는 2.1.4절에서 다루었다.

(1) 행렬의 덧셈과 뺄셈(addition and subtraction of matrices)

행렬의 덧셈과 뺄셈은 같은 수의 행과 열을 갖는 행렬에서만 정의할 수 있고 다음과 같이 정의된다. 두 개의 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 와 $B = (b_{ij})$ 의 합과 차 $C = (c_{ij})$ 는

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1-2)$$

인 행렬이고

$$C = A \pm B \quad (2.1-3)$$

라고 쓴다.

예를들어, 두 행렬 A 와 B 가 다음과 같을 때,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 11 & 13 \end{bmatrix} \text{ 이고 } A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 9 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

행렬의 덧셈과 뺄셈에 관련된 성질은 다음과 같다.

$$(a) \quad A + B = B + A : \text{교환법칙} \quad (2.1-3a)$$

$$(b) \quad (A + B) + C = A + (B + C) : \text{결합법칙} \quad (2.1-3b)$$

$$(c) \quad A + 0 = A, \text{ 여기서 } 0 \text{은 } 0 \text{행렬(null matrix)이다.} \quad (2.1-3c)$$

$$(d) \quad A + (-A) = 0 \quad (2.1-3d)$$

(2) 행렬의 상수곱(multiplication of matrix by number)

행렬 A 와 상수 k 의 곱을 kA 또는 Ak 로 표시하며, kA 는 A 의 모든 원소에 k 를 곱하여 얻어지는 행렬을 말한다. 여기서, $(-1)A = -A$ 임에 유의하기 바란다.

$$\text{예를들어, } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \text{ 일 때, } 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix}, \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

행렬의 상수곱과 관련된 성질은 다음과 같다.

$$(a) \quad k(A + B) = kA + kB \quad (2.1-4a)$$

$$(b) \quad (k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A \quad (2.1-4b)$$

$$(c) \quad k_1(k_2A) = (k_1 k_2)A \quad (2.1-4c)$$

$$(d) 1A = A \quad (2.1-4d)$$

(3) 행렬의 곱셈(multiplication of matrices)

행렬 $A = (a_{ij})$ 는 $m \times n$ 행렬이고 행렬 $B = (b_{ij})$ 는 $r \times p$ 행렬이라 하자. 이때 두 행렬의 곱 AB 는 오직 $r = n$ 일 때만 정의되고, 곱 AB 를 $C = (c_{ij})$ 라고 하면

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, p \quad (2.1-5)$$

으로 정의되며, C 는 $m \times p$ 행렬이다.

c_{ij} 는 행렬 A 의 i 번째 행벡터와 행렬 B 의 j 번째 열벡터의 스칼라곱임을 알 수 있으며, c_{ij} 의 계산과정을 그림으로 나타내면 그림 2.1-1과 같다.

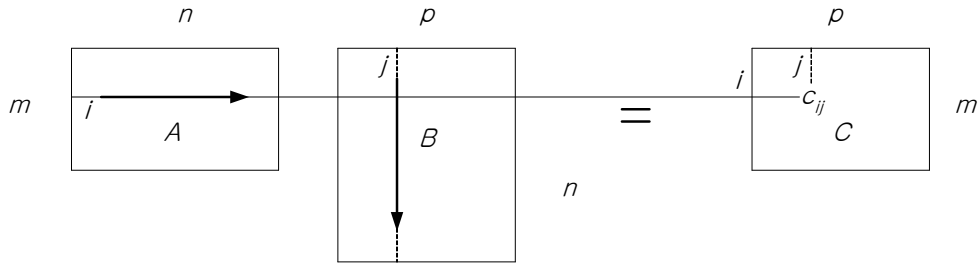


그림 2.1-1 c_{ij} 의 계산

AA 를 간단히 A^2 으로 나타내며, AB 가 정의될 때 BA 는 정의되지 않을 수도 있으며, 반드시 $AB = BA$ 인 것은 아니다.

예를들어, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 일 때,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+2-3 & 1+4+0 & 0+8+9 \\ -8+5-6 & 4+10+0 & 0+20+18 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 5 & 17 \\ -9 & 14 & 38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 그러나 BA 는 정의되지 않는다.

또한 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 일 때,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -2+4-3 & 1+8+6 \\ -8+10-6 & 4+20+12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -4 & 36 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2+4 & -4+5 & -6+6 \\ 2+16 & 4+20 & 6+24 \\ -1+8 & -2+10 & -3+12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 18 & 24 & 30 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

이다. 이 경우에 $AB \neq BA$ 임을 알 수 있다.

또다른 예로서, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 일 때,

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 4+10+18 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

이다. 이 경우에도 $AB \neq BA$ 이다.

행렬의 곱셈에 관련된 성질은 다음과 같다.

① 곱셈이 정의되는 행렬 A, B, C 에 대하여,

$$(a) \quad (kA)B = k(AB) = A(kB) \quad (2.1-6)$$

$$(b) \quad A(BC) = (AB)C = ABC \quad (2.1-7)$$

$$(c) \quad (A+B)C = AC+BC, \quad C(A+B) = CA+CB \quad (2.1-8)$$

$$(d) \quad A0 = 0, \quad 0A = 0 \quad (2.1-9)$$

$$(e) \quad AI = IA = A \quad (2.1-10)$$

② 일반적으로 $AB \neq BA$ 이다. (2.1-11)

③ $AB=0$ 이 반드시 $A=0$ 또는 $B=0$ 을 의미하지는 않는다. (2.1-12)

예를들어, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 또한 $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이므로 $AB=0$ 이

$BA=0$ 를 의미하지는 않는다.

④ $(AB)^T = B^T A^T$ 이다. (2.1-13)

2.1.3 연립1차방정식 : 해의 존재성과 일반적 성질

다음의 식들과 같이 미지수가 n 개이고 방정식의 수가 m 개인 연립1차방정식의 해의 존재성과 해를 구하는 방법에 대하여 생각해 보자.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (2.1-14a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2.1-14b)$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (2.1-14c)$$

먼저 해의 존재성에 대하여 살펴보자.

첫 번째로 $n > m$ 인 경우, 즉, 미지수의 수가 독립방정식의 수보다 많은 경우에는 해는 존재하고 무수히 많다.

예를 들어, $x - y = 1$ 를 만족하는 x, y 는 무수히 많다. 그림 2.1-2에서 직선위의 모든 점은 $y = x + 1$ 의 해이다.

두 번째로 $n < m$ 인 경우, 즉, 미지수의 수가 독립방정식의 수보다 많은 경우에는 해는 존재하지 않는다.

예를 들어, 다음의 세 식을 동시에 만족하는 x, y 는 존재하지 않는다. 그림 2.1-3에서 세 직선이 한 점에서 만나지 않으므로 해는 없다.

$$x - y = 1$$

$$x + y = 1$$

$$2x + y = 1$$

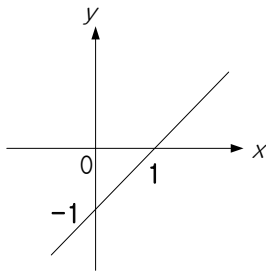


그림 2.1-2

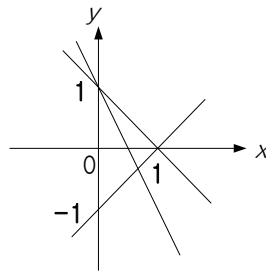


그림 2.1-3

세 번째로 $n = m$ 인 경우, 즉, 미지수의 수와 방정식의 수가 같은 경우에는 해가 없을 수도 있고, 오직 하나의 해가 존재할 수도 있고, 무수히 많은 해가 존재할 수도 있다.

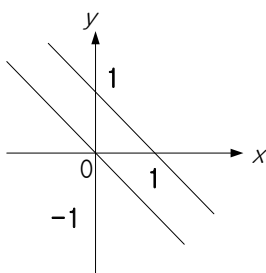
예를 들어, 다음의 연립1차방정식의 경우를 생각해 보자.

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

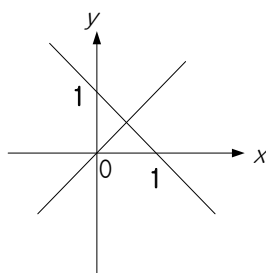
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

위의 두 방정식은 xy -평면에서 각각 직선으로 나타나며, 해는 직선위의 점이므로 다음과 같이 3가지의 경우가 있을 수 있다.

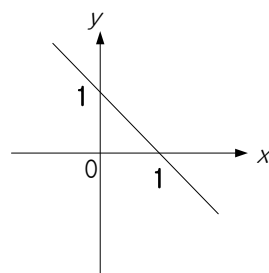
- (a) 그림 2.1-4의 (a)에서와 같이 두 직선이 평행하면 해는 없다.
- (b) 그림 2.1-4의 (b)에서와 같이 두 직선이 한 점에서 만나면 단 하나의 해가 존재한다.
- (c) 그림 2.1-4의 (c)에서와 같이 두 직선이 일치하면 무수히 많은 해가 존재한다.



(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$



(b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$



(c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

그림 2.1-4 연립1차방정식의 그래프

$n = m$ 일 때, 식(2.1-14a) ~ 식(2.1-14c)의 연립1차방정식은 항상 해를 갖는 것은 아니다. 그러면 어떤 조건에서 식(2.1-14a) ~ 식(2.1-14c)의 연립1차방정식이 단 하나의 해를 갖는가에 대하여 살펴보자. 행렬 A , 벡터 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{b}$ 를 다음의 식들로 정의하면,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.1-15a)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.1-15b)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.1-15c)$$

식(2.1-14a) ~ 식(2.1-14c)의 연립1차방정식은 단 하나의 벡터방정식

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.1-16)$$

으로 표시할 수 있다. 여기서 계수 a_{ij} 가 모두는 0이 아니라고 가정하자. 따라서 A 는 0행렬은 아니다.

식(2.1-14a) ~ 식(2.1-14c)의 연립1차방정식이 해를 갖는 조건은 식(2.1-16)의 벡터방정식이 단 하나의 해를 갖는 조건과 같으며, 만일 $n = m$ 이고 $\text{rank}(A) = n$ 이면, 식(2.1-16)의 연립1차방정식은 단 하나의 해를 갖는다. 그림 2.1-4에서, (a)의 경우 $\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 < 2$ 이고 해는 존재하지 않는다. (b)의 경우 $\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2$ 이고 단 하나의 해가 존재한다. (c)의 경우 $\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 < 2$ 이고 무수히 많은 해가 존재한다.

2.1.4 역행렬(inverse matrix)

스칼라량의 대수연산에서 $ax = b$, $a \neq 0$ 일 때 $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$ 이다. 행렬연산에서는 만일 $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 일 때, 이 벡터방정식을 만족하는 $\mathbf{x}$ 가 존재하면 다음과 같이 쓴다.

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b} \quad (2.1-17)$$

$n \times n$ 행렬 A 의 역행렬(inverse matrix)을 A^{-1} 로 표기하며, 역행렬은 정방행렬에 대하여만 정의되고, 역행렬 A^{-1} 은

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (2.1-18)$$

를 만족하는 $n \times n$ 행렬로 정의된다. 여기서 I 는 n 차 단위행렬이다.

$n \times n$ 행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 의 존재성과 A^{-1} 를 구하는 방법을 알아보기 전에 먼저 행렬의 행렬식(determinant of a matrix), 행렬식 원소의 여인자(cofactor), 정칙행렬(nonsingular matrix), 특이행렬(singular matrix)에 대하여 알아보자.

행렬의 행렬식(determinant of a matrix)과 소행렬식(minor) : 정방행렬 A 의 행렬식(determinant of a matrix)을 다음과 같이 나타내며,

$$\det(A) = \Delta_A = |A| \quad (2.1-19)$$

행렬 A 가 2×2 일 때,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (2.1-20)$$

이고, 3×3 행렬 A 가

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1-21)$$

일 때,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{aligned} \quad (2.1-22)$$

이다.

행렬에서, 한 행과 한 열을 제외시킴으로써 얻어진 행렬식을 제거한 행과 열에 속하는 **원소의 소행렬식(minor)**이라고 부른다. 예를들어, 식(2.1-21)에서 a_{11} , a_{12} , a_{13} 의 소행렬식을 각각 M_{11} , M_{12} , M_{13} 라고 하면

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

이고, a_{21} , a_{31} , a_{22} 의 소행렬식을 각각 M_{21} , M_{31} , M_{22} 라고 하면

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

이다.

행렬식 원소의 여인자(cofactor) : n 차 행렬식 $|A|$ 에 대하여, 임의의 원소 a_{ij} 의 여인자(cofactor) A_{ij} 는 i 번째 행과 j 번째 열을 제거하고 얻어진 a_{ij} 의 소행렬식 M_{ij} 에 $(-1)^{i+j}$ 를 곱한 것이다. 즉, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 이다. 예를들어, 식(2.1.4-6)에서 a_{11} , a_{12} , a_{13} 의 여인자를 각각 A_{11} , A_{12} , A_{13} 라고 하면

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

이고, a_{21} , a_{31} , a_{22} 의 여인자를 각각 A_{21} , A_{31} , A_{22} 라고 하면

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

이다.

일반적으로 행렬식의 값은 여인자의 향으로 나타낼 수 있다. A 를 $n \times n$ 행렬이라고 하면, A 의 행렬식을 각 행의 여인자 또는 각 열의 여인자로 나타낼 수 있다. 즉,

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1-23)$$

또는

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1-24)$$

이다.

정칙행렬(nonsingular matrix)과 특이행렬(singular matrix) : 정칙행렬과 특이행렬은 정방행렬에 대하여만 정의되고, $n \times n$ 행렬 A 에 대하여, $rank(A) = n$ 인 행렬 또는 행렬식의 값이 0이 아닌 행렬을 정칙행렬(nonsingular matrix)이라 부르고, $rank(A) < n$ 인 행렬 또는 행렬식의 값이 0인 행렬을 특이행렬(singular matrix)이라 부른다. $rank(A) = n$ 인 행렬의 행렬식의 값은 0이 아니고 $rank(A) < n$ 인 행렬의 행렬식의 값은 0이다. 행렬이 특이행렬이면 모든 행들 혹은 모든 열들이 서로 독립이 아니며, 행렬이 정칙이면 모든 행들 혹은 모든 열들이 서로 독립이다. 연립1차방정식이 행렬로 표현되었을 때, 행렬의 정칙성은 이 방정식들이 서로 독립임을 의미한다.

역행렬이 존재할 조건은 다음과 같고,

$n \times n$ 행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 가 존재할 필요충분조건은 $rank(A) = n$ 이다. 즉, A 가 정칙행렬이면 역행렬 A^{-1} 가 존재한다.

$n \times n$ 정칙행렬 $A = (a_{ij})$ 의 역행렬은

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (2.1-25)$$

이다. 여기서 A_{ij} 는 원소 a_{ij} 의 여인자이다.

예를들어, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 의 역행렬은

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{21} \\ (-1)^{2+1}a_{12} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1-26)$$

이고, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 역행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 3(-1 - 0) + 4(0 + 1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

이므로

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{4}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{4}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다.

역행렬의 성질은 다음과 같다.

$$\textcircled{1} AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (2.1-27)$$

$$\textcircled{2} (A^{-1})^{-1} = A \quad (2.1-28)$$

③ 식(2.1.2.1-18)에서 알 수 있는 바와 같이, 행렬에서 $AB=AC$ 가 반드시 $B=C$ 를 의미하지는 않는다. 그러나 만일 A 가 정방행렬이고 정칙이면 $AB=AC$ 의 양변에 A^{-1} 를 곱할 수 있으므로

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \quad (2.1-29)$$

가 되어 $B=C$ 를 얻는다.

④ 만일 A, B 가 정방행렬이고 정칙이면,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (2.1-30)$$

이다.

식(2.1-14a) ~ 식(2.1-14c)의 연립1차방정식의 해는 소거법 또는 대입법의 사용으로 구할 수 있으나, 여기서는 연립방정식을 벡터방정식으로 나타냈을 때 해를 구하는 법에 대하여 살펴보자. 식(2.1-16)과 동일한 식(2.1-31)에서,

$$A \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.1-31)$$

$n \times n$ 행렬 A 는 정칙(즉, n 개의 방정식이 서로 독립)이라고 하면, 식(2.1-31)의 해 $\mathbf{X}$ 는

$$\mathbf{X} = A^{-1} \mathbf{b} \quad (2.1-32)$$

이다.

예를 들어, 식(2.1-33)과 식(2.1-34)의 연립1차방정식의 해를 구해보자.

$$x + y = 1 \quad (2.1-33)$$

$$x - y = 0 \quad (2.1-34)$$

먼저 **소거법**으로 해를 구해보자. 식(2.1-33)과 식(2.1-34)를 더하면

$$2x = 1$$

이므로

$$x = \frac{1}{2} \quad (2.1-35)$$

이다. 식(2.1-35)를 식(2.1-33)에 대입하면

$$y = \frac{1}{2} \quad (2.1-36)$$

이다.

이제 식(2.1-33)과 식(2.1-34)의 연립1차방정식을 벡터방정식으로 표현하고 해를 구해보자. 식(2.1-33)과 식(2.1-34)를 벡터방정식으로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1-37)$$

이고, 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 는 정칙(nonsingular)이므로 역행렬이 존재한다. 따라서,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 어느 방법으로 구하든 해는 같다.

2.2 복소수, 복소변수와 복소함수

2.2.1 복소수와 복소평면

$2 + j1$, $3 - j2$, $j5$ 등과 같이 실수부와 허수부가 있는 수를 **복소수(complex number)**라고 하며, 복소수를 평면 위의 한 점과 대응시켜 나타낼 수 있다. 그림 2.2-1과 같이, 실수부(real part)가 a 이고 허수부(imaginary part)가 b 인 복소수 $z = a + jb$ 를 xy 직교좌표평면 위의 한 점 $P(a, b)$ 로 대응시켜 나타낼 수 있다. 이와 같이 복소수를 평면 위의 한 점으로 나타낼 때, 이 평면을 **복소평면**이라고 한다. 이 때, x 축을 **실수축(real axis)**이라 하고, y 축을 **허수축(imaginary axis)**이라 한다. 복소수 z 의 실수부를 $Re\{z\}$ 로 표기하고 허수부를 $Im\{z\}$ 로 표기한다. 예를 들어, $z = 2 + j5$ 일 때, $Re\{z\} = 2$ 이고, $Im\{z\} = 5$ 이다.

복소수 $z = a + jb$ 의 켤레복소수(conjugate complex number)를 $\bar{z}$ 로 나타내며 $\bar{z} = a - jb$ 이고, 복소평면에서 점 $\bar{z}$ 와 점 z 는 실수축 x 에 대하여 대칭이다. 또한 $-z$ 는 $-z = -a - jb$ 이므로 점 $-z$ 와 점 z 는 원점에 대하여 대칭이다.

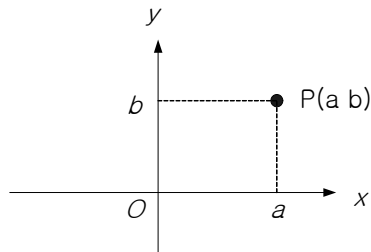


그림 2.2-1 복소평면과 복소수

복소수 $z = a + jb$ 에서 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 를 z 의 **절대값**이라 하고, $|z|$ 로 나타낸다. 즉 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이며, 절대값 $|z|$ 는 복소평면 위에서 원점과 점 z 사이의 거리를 의미한다.

2.2.2 복소수의 표현법

평면 위에 있는 한 점은 **직교좌표계**와 **극좌표계**의 두 가지 좌표계에서 나타낼 수 있다. 따라서, 복소수도 두 가지의 방법으로 표현할 수 있다.

(1) 직교좌표계로의 표현법(복소수의 직교좌표형식)

그림 2.2-1에서, 평면 위의 한 점 P 의 위치는 x 축 좌표와 y 축 좌표의 순서쌍 (a, b) 로 나타낼 수 있다. 이와 같은 표현법을 직교좌표계에서의 표현법이라고 부르며, 보통 $P(a, b)$ 로 나타낸다. 따라서, 복소수 z 를 직교좌표계로 표현하면 $z = a + jb$ 의 형태가 된다.

(2) 극좌표계로의 표현법(복소수의 극형식)

그림 2.2-2에서, 평면 위의 한 점 P 의 위치는 **원점으로부터의 거리** r 와 x 축에서 OP 까지에 이르는 윗향각 θ 의 순서쌍 (r, θ) 로 나타낼 수 있다. 이와 같은 표현법을 극좌표계에서의 표현법 또는 **극형식**으로의 표현법이라고 부르며, 보통 $r \angle \theta$ 로 나타낸다. r 를 복소수의 **절대값** 또는 **크기**라고 하고 $r = |z|$ 으로 표시하며, 윗향각 θ 를 복소수의 **편각(argument)**이라 부르고, $\arg z$ 로 표기한다. 편각 θ 는 반시계방향을 양의 방향으로, 시계방향을 음의 방향으로 정하였다.

복소수 z 를 극형식으로 표현하면

$$z = r \angle \Theta \quad (2.2-1a)$$

또는

$$z = r(\cos \Theta + j \sin \Theta) \quad (2.2-1b)$$

의 형태이다.

한편 오일러의 공식에 의하여

$$e^{j\Theta} = \cos \Theta + j \sin \Theta \quad (2.2-2)$$

이므로, 식(2.2-1b)는 다음의 식(2.2-3)과 같다.

$$z = r e^{j\Theta} \quad (2.2-3)$$

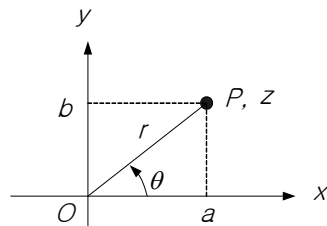


그림 2.2-2 복소수의 표현법

(3) 직교좌표형식으로의 표현법과 극좌표형식으로의 표현법 사이의 관계

식(2.2-4)와 같이 직교좌표형식으로 표현된 복소수 z 를

$$z = a + jb \quad (2.2-4)$$

극형식으로 나타내면, 그림 2.2-2에서

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

$$\Theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (2.2-6)$$

이므로 식(2.2-7a) 또는 식(2.2-7b)와 같다.

$$\begin{aligned} z &= r \angle \Theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.2-7a)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos \tan^{-1} \frac{b}{a} + j \sin \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \quad (2.2-7b)$$

식(2.2-8)과 같이 극형식으로 표현된 복소수 z 를

$$z = r \angle \Theta \quad (2.2-8)$$

직교좌표형식으로 나타내면, 그림 2.2-2에서

$$a = r \cos \Theta, \quad b = r \sin \Theta \quad (2.2-9)$$

이므로 식(2.2-10)과 같다.

$$\begin{aligned} z &= a + jb \\ &= r \cos \Theta + jr \sin \Theta \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

복소수 $z = a + jb = r \angle \theta = r e^{j\theta}$ 의 켤레복소수(complex conjugate) $\bar{z}$ 는 $\bar{z} = a - jb = r \angle -\theta = r e^{-j\theta}$ 이다.

한편 복소수 $z = a + jb = r \angle \theta = re^{j\theta}$ 의 크기 $|z|$ 는 $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이므로 $z\bar{z} = |z|^2$ 이다.

[예제 2.2-1 : 복소수의 표현법]

(1) $z = 1 + j1$ 를 극형식으로 나타내어라.

(2) $z = 2 \angle \frac{\pi}{6}$ 를 직각좌표형식으로 나타내어라.

[풀이]

(1) 그림 2.2-3에서, $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $z = 1 + j1$ 를 극형식으로 나타내면, $z = \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$ 또는 $z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})$ 이다.

(2) 그림 2.2-4에서, $z = 2 \angle \frac{\pi}{6}$ 를 직각좌표형식으로 나타내면,

$$z = 2 \cos \frac{\pi}{6} + j2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{3} + j1$$

이다.

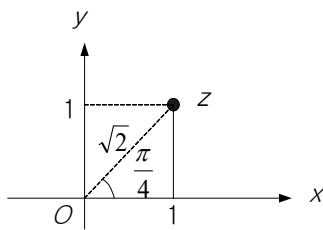


그림 2.2-3

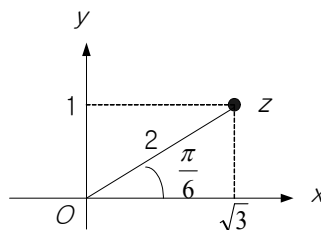


그림 2.2-4

2.2.3 복소수의 연산

직각좌표형식으로 표현된 두 복소수 $z_1 = a + jb$ 와 $z_2 = c + jd$ 의 사칙연산은 다음과 같다.

(1) 덧셈과 뺄셈

$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d) \quad (2.2-11)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d) \quad (2.2-12)$$

(2) 곱셈과 나눗셈

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + jb)(c + jd) \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned} \quad (2.2-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + jb}{c + jd} \\ &= \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \end{aligned} \quad (2.2-14)$$

위의 식들에서, 복소수를 직교좌표형식으로 나타내면 복소수의 덧셈과 뺄셈은 쉬우나 곱셈과 나눗셈이 비교적 복잡함을 알 수 있다.

극좌표형식으로 표현된 두 복소수

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \angle \theta_1 \\ &= r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \\ &= r_1 e^{j \theta_1} \end{aligned}$$

과

$$\begin{aligned} z_2 &= r_2 \angle \theta_2 \\ &= r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= r_2 e^{j \theta_2} \end{aligned}$$

의 사칙연산은 다음과 같다.

(3) 덧셈과 뺄셈

$$z_1 + z_2 = r_1 \angle \theta_1 + r_2 \angle \theta_2 \quad (2.2-15a)$$

$$= (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + j(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2) \quad (2.2-15b)$$

$$z_1 - z_2 = r_1 \angle \theta_1 - r_2 \angle \theta_2 \quad (2.2-16a)$$

$$= (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) + j(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) \quad (2.2-16b)$$

극형식의 복소수를 덧셈과 뺄셈을 할 때에는, 극형식을 직교좌표형식으로 바꾼 다음 덧셈과 뺄셈을 하여야 함을 알 수 있다.

(4) 곱셈과 나눗셈

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) \quad (2.2-17a)$$

$$= r_1 e^{j \theta_1} \times r_2 e^{j \theta_2} \quad (2.2-17b)$$

$$= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.2-17c)$$

$$= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \quad (2.2-17d)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} \quad (2.2-18a)$$

$$= \frac{r_1 e^{j \theta_1}}{r_2 e^{j \theta_2}} \quad (2.2-18b)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad (2.2-18c)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2) \} \quad (2.2-18d)$$

위의 식들에서, 복소수를 극형식으로 나타내면 복소수의 곱셈과 나눗셈이 간단함을 알 수 있다.

$z_1 = z_2$ 인 경우, 식(2.2-17d)를 일반화하면,

$$\begin{aligned} z^n &= \{r(\cos\theta + j\sin\theta)\}^n \\ &= \{r e^{j\theta}\}^n \end{aligned} \quad (2.2-19a)$$

$$= r^n e^{jn\theta} \quad (2.2-19b)$$

$$= r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) \quad (2.2-19c)$$

이므로,

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \{e^{j\theta}\}^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j\sin n\theta \quad (2.2-20)$$

이다. 위의 식(2.2-20)을 **드 무아브르(De Moivre)의 공식**이라고 한다.

[예제 2.2-2 : 복소수의 사칙연산] $z_1 = 1 + j$, $z_2 = 1 + j\sqrt{3}$ 일 때, 다음을 구하여라.

$$(1) \ z_1 + z_2 \quad (2) \ z_1 - z_2 \quad (3) \ z_1 z_2 \quad (4) \ \frac{z_1}{z_2}$$

[풀이]

$$\begin{aligned} (1) \ z_1 + z_2 &= (1+1) + j(1 + \sqrt{3}) \\ &= 2 + j(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \ z_1 - z_2 &= (1-1) + j(1 - \sqrt{3}) \\ &= j(1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \ z_1 z_2 &= (1 + j)(1 + j\sqrt{3}) \\ &= (1 - \sqrt{3}) + j(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+j}{1+j\sqrt{3}} \\ &= \frac{(1+j)(1-j\sqrt{3})}{(1+j\sqrt{3})(1-j\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{3} + j(1-\sqrt{3})}{1+3} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + j\frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

[예제 2.2-3 : 복소수의 사칙연산] $z_1 = \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$, $z_2 = 1 + j\sqrt{3}$ 일 때, 다음을 구하여라.

$$(1) \ z_1 + z_2 \quad (2) \ z_1 - z_2 \quad (3) \ z_1 z_2 \quad (4) \ \frac{z_1}{z_2}$$

[풀이]

z_2 극좌표로 나타내면 $z_2 = 2 \angle \frac{\pi}{3}$ 이다.

$$\begin{aligned} (1) \ z_1 + z_2 &= \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4} + 2 \angle \frac{\pi}{3} \\ &= (\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + j\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) + (1 + j\sqrt{3}) \\ &= (1 + j) + (1 + j\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$= 2 + j(1 + \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} (1) \quad z_1 - z_2 &= \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4} - 2 \angle \frac{\pi}{3} \\ &= (\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + j\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) - (1 + j\sqrt{3}) \\ &= (1 + j) - (1 + j\sqrt{3}) \\ &= j(1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad z_1 z_2 &= (\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4})(2 \angle \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{2} \angle (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{2} \angle \frac{7}{12} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}}{2 \angle \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \angle (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \angle (-\frac{\pi}{12}) \end{aligned}$$

[예제 2.2-4 : 연립방정식] 다음 두 식을 만족하는 z_1 과 z_2 를 구하고 결과를 극좌표로 나타내시오.

$$(1 + j)z_1 + 2z_2 = 4 + j2 \quad \text{--- ①}$$

$$2z_1 + (1 + j4)z_2 = 6 \quad \text{--- ②}$$

[풀이] 식① x 2 하면 다음의 식③과 같고,

$$2(1 + j)z_1 + 4z_2 = 8 + j4 \quad \text{--- ③}$$

식② x $(1 + j)$ 하면 다음의 식과 같고,

$$2(1 + j)z_1 + (1 + j)(1 + j4)z_2 = 6(1 + j)$$

위의 식을 정리하면 다음의 식④와 같다.

$$2(1 + j)z_1 + (-3 + j5)z_2 = 6(1 + j) \quad \text{--- ④}$$

식③ - 식④ 하면

$$(7 - j5)z_2 = 2 - j2$$

이므로

$$z_2 = \frac{2 - j2}{7 - j5} = \frac{(2 - j2)(7 + j5)}{(7 - j5)(7 + j5)} = \frac{24}{74} - j\frac{4}{74} = \frac{12}{37} - j\frac{2}{37} = 0.33 \angle -9.5^\circ \quad \text{--- ⑤}$$

이다. 식⑤를 식②에 대입하면

$$2z_1 + (1 + j4)(\frac{12}{37} - j\frac{2}{37}) = 6,$$

$$2z_1 + \frac{20 + j46}{37} = 6$$

$$\text{이므로, } z_1 = 3 - \frac{10 + j23}{37} = \frac{101 - j23}{37} = 2.8 \angle -12.8^\circ \text{ 이다.}$$

2.2.4 복소변수, 복소함수와 해석함수

실수부 σ 와 허수부 ω 가 모두 **실변수(real variable)**인 복소수 $s = \sigma + j\omega$ 를 **복소변수(complex variable)**라고 한다. 따라서, 복소변수 s 의 정의역은 복소 s 평면 전체이다.

모든 s 값에 대하여 하나 이상의 대응되는 $F(s)$ 가 존재하면 $F(s)$ 는 복소변수 s 의 함수라고 한다. s 는 실수부와 허수부를 가지므로 **복소함수** $F(s)$ 도 실수부와 허수부로 나누어 식(2.2-21)과 같이 표시할 수 있다.

$$F(s) = \text{Re}\{F(s)\} + j\text{Im}\{F(s)\} \quad (2.2-21)$$

따라서, 복소함수 $F(s)$ 의 그래프는 수평축이 $\text{Re}\{F(s)\}$ 이고 수직축이 $\text{Im}\{F(s)\}$ 인 복소

$F(s)$ 평면 상에 나타낼 수 있다. 예를 들어, $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ 에 대응하는 점 $F(s_1)$ 을 $F(s)$ 평면상에서 나타내면 그림 2.2-5와 같다.

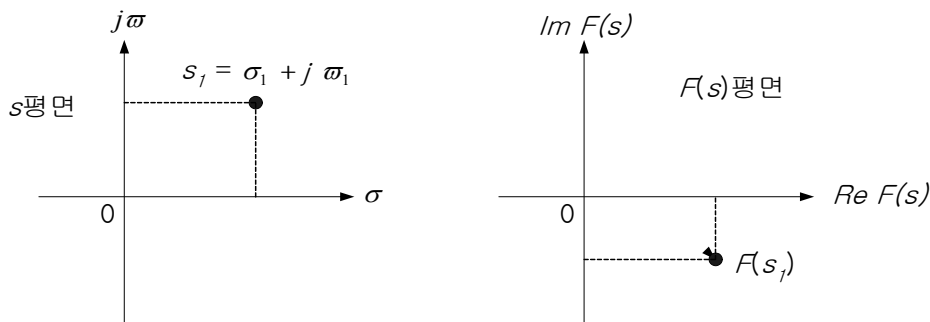


그림 2.2-5 s 평면과 $F(s)$ 평면에서의 대응

만일 s 평면의 어떤 영역에 대하여 어떤 함수와 그 함수의 모든 도함수가 존재하면, 복소함수 $F(s)$ 는 그 영역에서 **해석적(analytic)**이라고 한다. 예를 들면, 함수

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (2.2-22)$$

는 $s=0$, $s=-1$, $s=-1 \pm j$ 를 제외한 모든 점에서 해석적이다.

2.2.5 복소함수의 극(극점:pole)과 영점(zero)

어떤 복소함수 $F(s)$ 가 s_i 근방에서 해석적이며 단가(single value)이고 다음의 극한값

$$\lim_{s \rightarrow s_i} [(s-s_i)^r F(s)] \quad (2.2-23)$$

가 0이 아닌 유한한 값을 가지면 이 함수 $F(s)$ 는 $s=s_i$ 에 r 차의 극(pole)을 갖는다고 하며, 극을 극점이라고도 부른다. 다시 말하면, $F(s)$ 의 분모가 $(s-s_i)^r$ 의 항을 포함하면 $F(s)$ 는 $s=s_i$ 에 r 차의 극(pole)을 갖는다. 극은 함수 $F(s)$ 의 값이 정의되지 못하는 s 평면의 점들을 일컫는다. $r=1$ 인 경

우 $s = s_i$ 의 극을 단순극(simple pole)이라 하고, $r = 2$ 인 경우 $s = s_i$ 의 극을 이중극(double pole)이라 하고, $r = 3$ 인 경우 $s = s_i$ 의 극을 삼중극(triple pole)이라 한다. 예를 들면, 식(2.2.5-2)의 함수 $F(s)$ 는

$$F(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+1)(s+1+j)(s+1-j)(s+2)^2} \quad (2.2-24)$$

$s = 0$, $s = -1$, $s = -1-j$, $s = -1+j$ 에서 단순극을 갖고 $s = -2$ 에서 이중극을 갖는다.

만일 어떤 복소함수 $F(s)$ 가 s_i 에서 해석적이고 다음의 극한값

$$\lim_{s \rightarrow s_i} [(s-s_i)^{-r} F(s)] \quad (2.2-25)$$

가 0이 아닌 유한한 값을 가지면 이 함수 $F(s)$ 는 $s = s_i$ 에 r 차의 영점(zero)을 갖는다고 한다. 다시 말하면, $F(s)$ 의 분자가 $(s-s_i)^r$ 의 항을 포함하면 $F(s)$ 는 $s = s_i$ 에 r 차의 영점(zero)을 갖는다. **영점은 함수 $F(s)$ 의 값을 0으로 하는 s 평면의 점들을 일컫는다.** $r = 1$ 인 경우 $s = s_i$ 의 영점을 단순 영점(simple zero)이라 하고, $r = 2$ 인 경우 $s = s_i$ 의 영점을 이중영점(double zero)이라 한다. 예를 들면, 식(2.2.5-2)의 함수 $F(s)$ 는 $s = -3$ 에 단순 영점을 갖는다.

식(2.2-24)의 함수 $F(s)$ 는 $s = 0$, $s = -1$, $s = -1-j$, $s = -1+j$, $s = -2$, $s = -2$ 에 모두 6개의 **유한 극**을 갖고 $s = -3$ 에 1개의 **유한 영점**을 갖는다. 그러나

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+3)}{s(s+1)(s+1+j)(s+1-j)(s+2)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2-26)$$

이므로 $F(s)$ 는 $s = \infty$ 에 영점을 갖는다. **영점의 총수를 극점의 총수와 같게 정의**하므로 식(2.2-24)의 $F(s)$ 는 무한대에 5개의 영점이 있다. 즉, 식(2.2-24)의 $F(s)$ 는 무한대를 포함한 전체 s 평면에 모두 6개의 극점과 영점을 갖는다. **극점과 영점의 위치를 s 평면에 표시할 때, 유한 극점과 유한 영점만을 각각 ×표와 ○표로 나타내며 무한대에 존재하는 영점은 s 평면에 표시하지 않는다.** 식(2.2-24)의 함수 $F(s)$ 의 극점과 영점의 위치를 s 평면상에 나타내면 그림 2.2-5와 같으며, 식(2.2-24)의 함수 $F(s)$ 는 이들 극점을 제외한 s 평면에서 해석적이라고 할 수 있다.

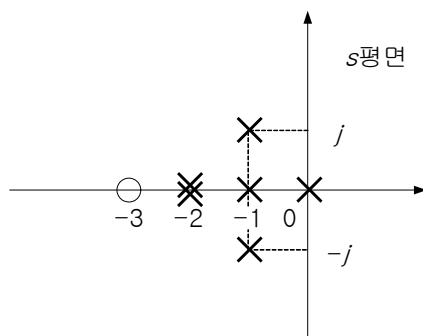


그림 2.2-5 극점과 영점의 위치 표시

2.3 삼각함수의 기초

(1) 각의 표현방법 : 각의 크기를 **60분법**과 **호도법(radian)**으로 나타낼 수 있으며, π

$$\text{rad} = 180^\circ \text{이다. 따라서, } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ, \quad \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \quad \frac{\pi}{4} = 45^\circ,$$

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ, \quad \frac{\pi}{2} = 90^\circ, \quad \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \text{이다.}$$

(2) 특수각의 삼각비의 값

그림 2.3-1로부터, 30° , 45° , 60° 에 대한 삼각비는 표2.3-1과 같다.

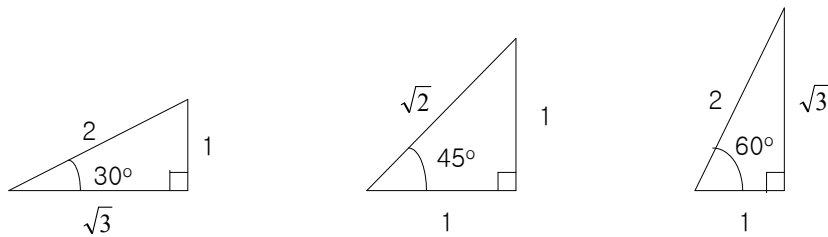


그림 2.3-1 특수각의 삼각비

표2.3-1 특수각의 삼각비의 값

	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

(3) 삼각함수의 기본성질

① $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

② $90^\circ n \pm \theta$ 의 삼각함수

(i) 주기공식

$$\sin(2\pi n + \theta) = \sin \theta, \quad \cos(2\pi n + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi n + \theta) = \tan \theta, \quad (\text{단, } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(ii) 음각공식

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(iii) 보각공식

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

(iv) 여각공식

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

③ 삼각함수의 덧셈정리

$$(i) \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$(ii) \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

④ 배각의 공식

$$(i) \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha,$$

$$(ii) \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\text{따라서, } \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

⑤ 곱을 합 또는 차로 변형하는 공식

$$(i) \sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(ii) \cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(iii) \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$(iv) \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

⑥ 삼각함수의 합성

$a \sin\theta + b \cos\theta$ 를 다음의 식(2.3-1) 또는 식(2.3-2)의 형태로 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다.

그림 2.3-2의 (a)에서, $a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\alpha$, $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} a \sin\theta + b \cos\theta &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

이다. 여기서, $\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ 이다.

그림 2.3-2의 (b)에서, $b = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\beta$, $a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\beta$ 이므로

$$\begin{aligned} a \sin\theta + b \cos\theta &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin\theta \sin\beta + \cos\theta \cos\beta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta) \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

이다. 여기서, $\beta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$ 이다.

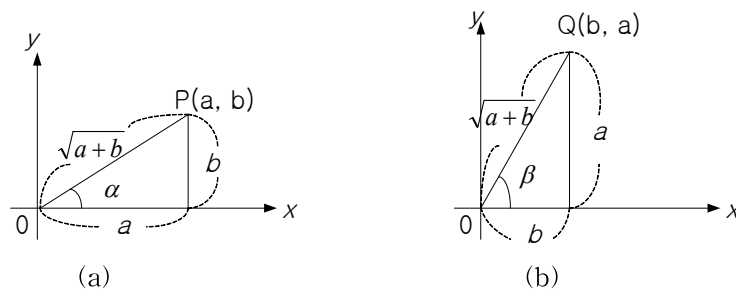


그림 2.3-2 삼각함수의 합성

[예: 시험문제] $y = \sqrt{3} \sin t + \cos t$ 를 $y = r \sin(t + \alpha)$ 와 $y = r \cos(t - \beta)$ 의 꼴로 변형하시오.

[풀이] 그림 2.3-3의 (a)에서와 같이, $\sin t$ 의 계수 $\sqrt{3}$ 을 x 좌표, $\cos t$ 의 계수 1을 y 좌표로 하는 점 $P(\sqrt{3}, 1)$ 을 잡을 때, $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$$\sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6}, \quad 1 = 2 \sin \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3} \sin t + \cos t \\ &= (2 \cos \frac{\pi}{6}) \sin t + (2 \sin \frac{\pi}{6}) \cos t \\ &= 2 \sin(t + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

이다.

그림 2.3-3의 (b)에서와 같이, $\sin t$ 의 계수 $\sqrt{3}$ 을 y 좌표, $\cos t$ 의 계수 1을 x 좌표로 하는 점 $Q(\sqrt{3}, 1)$ 을 잡을 때, $\tan \beta = \sqrt{3}$ 에서 $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$$\sqrt{3} = 2 \sin \frac{\pi}{3}, \quad 1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3} \sin t + \cos t \\ &= (2 \sin \frac{\pi}{3}) \sin t + (2 \cos \frac{\pi}{3}) \cos t \\ &= 2 \cos(t - \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

이다.

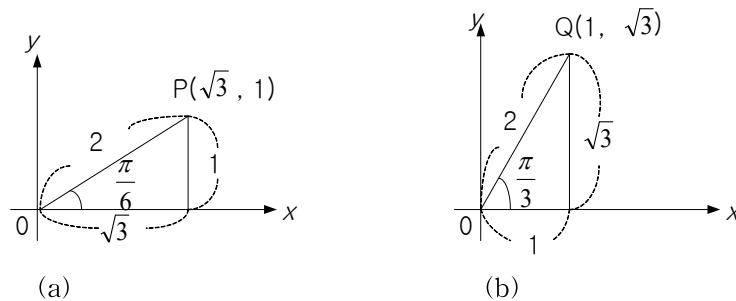


그림 2.3-3 삼각함수의 합성

⑦ 오일러의 공식

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta ,$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta \text{ 에서}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ 이고, } \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \text{ 이다.}$$

2.4 함수와 그래프

시간에 따라 변하는 전압이나 전류의 파형을 함수로 표현하므로, 이 절에서는 회로이론을 비롯한 전기전자공학에서 많이 사용되는 함수들과 그의 그래프에 대하여 소개하였다. 흔히 사용되는 함수로는 계단함수(step function), 램프함수(ramp function), 델타함수(delta function), 지수함수(expontial function), 삼각함수(triangular function)를 들 수 있다.

(1) 계단함수와 그의 그래프

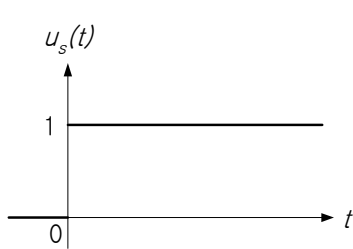
단위 계단함수(unit step function) $u_s(t)$ 는 다음의 식(2.4-1a)로 정의되며, $u_s(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-1의 (a)와 같고,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.4-1a)$$

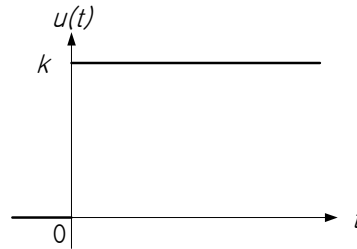
계단함수(step function) $u(t)$ 는 다음의 식(2.4-1b)로 정의되며, $u(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-1의 (b)와 같다.

$$u(t) = \begin{cases} k, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.4-1b)$$

$$= ku_s(t)$$



(a) 단위 계단함수의 그래프



(b) 계단함수의 그래프

그림 2.4-1 단위계단함수와 계단함수의 그래프

단위계단함수 $u_s(t)$ 와 함수 $f(t)$ 의 곱 $y = f(t) u_s(t)$ 를 식으로 나타내면 다음의 식(2.4-2)와 같고,

$$\begin{aligned} y &= f(t) u_s(t) \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t), & t > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4-2)$$

$y = f(t) u_s(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-2와 같다.

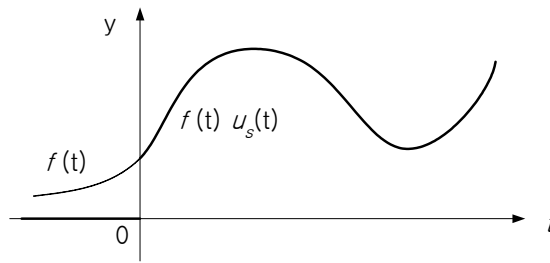


그림 2.4-2 $y = f(t)u_s(t)$ 의 그래프

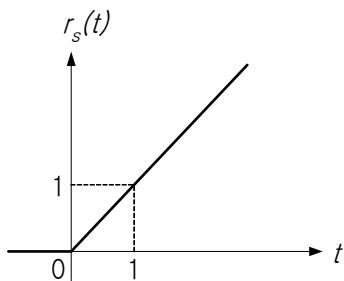
(2) 램프함수와 그의 그래프

단위 램프함수(unit ramp function) $r_s(t)$ 는 다음의 식(2.4-3a)로 정의되며, $r_s(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-3의 (a)와 같고,

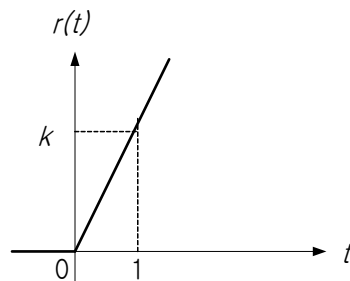
$$\begin{aligned} r(t) &= \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ &= tu_s(t) \end{aligned} \quad (2.4-3a)$$

램프함수(ramp function) $r(t)$ 는 다음의 식(2.4-3b)로 정의되며, $r(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-3의 (b)와 같다.

$$\begin{aligned} r(t) &= \begin{cases} kt, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ &= ktu_s(t) \end{aligned} \quad (2.4-3b)$$



(a) 단위 램프함수의 그래프



(b) 램프함수의 그래프

그림 2.4-3 단위 램프함수와 램프함수의 그래프

(3) 델타함수와 그의 그래프

면적이 1인 함수 $\delta_h(t)$ 를 그림 2.4-4의 (a)와 같이 정의하면, 델타함수(delta function) $\delta(t)$ 는 다음의 식(2.4-4)로 정의되며 $\delta(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-4의 (b)와 같다.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) \\ &= \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{그리고} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

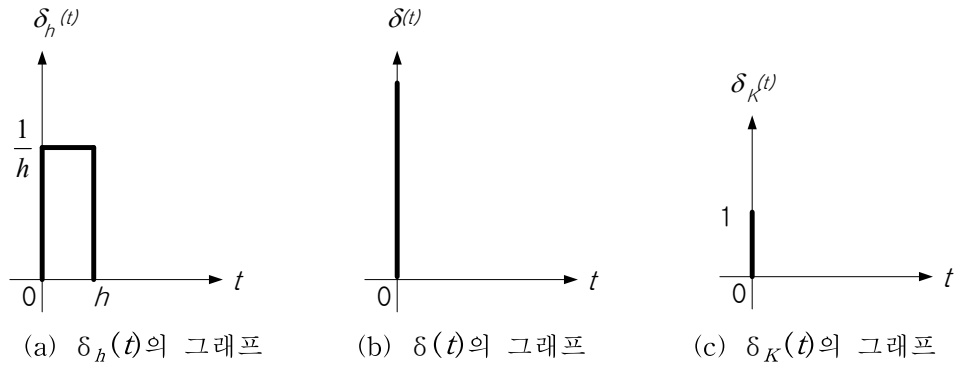


그림 2.4-4 함수 $\delta_h(t)$, $\delta(t)$, $\delta_K(t)$ 의 그래프

식(2.4-4)로 정의되는 함수를 **디랙 델타함수**(Dirac delta function) 또는 **임펄스함수**(impulse function)라고 부르며, 엄밀한 의미에서 보면 $\delta(t)$ 는 함수가 아니다. 또한 임펄스함수에서

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-T) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(T) \delta(t-T) dt \\
 &= f(T) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) dt \\
 &= f(T)
 \end{aligned}
 \tag{2.4-5}$$

이다.

다음의 식(2.4-6)으로 정의되는 함수 $\delta_K(t)$ 를 **크로넬러 델타함수**(Kronecker delta function) 또는 **단위 임펄스함수**(unit impulse function)라고 부르며, $\delta_K(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-4의 (c)와 같다. 또한 크로넬러 델타함수에서

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta_K(t-T) dt = f(T)
 \tag{2.4-6}$$

이다.

(4) 지수함수와 그의 그래프

예를들면, $y=2^x$, $y=3^x$, $y=(\frac{1}{4})^x$, $y=e^x$, $y=e^{-x}$, ... 등과 같이

$$y = a^x, a \neq 1, a > 0
 \tag{2.4-7}$$

의 형태로 표현되는 함수를 a 를 밑으로 하는 x 의 **지수함수**(exponential function)라고 한다. 여기서, e 는 식(2.5-1)의 극한값으로 정의되는 무한소수이다.

식(2.4-7)로 정의되는 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프는 그림 2.4-5와 같다.

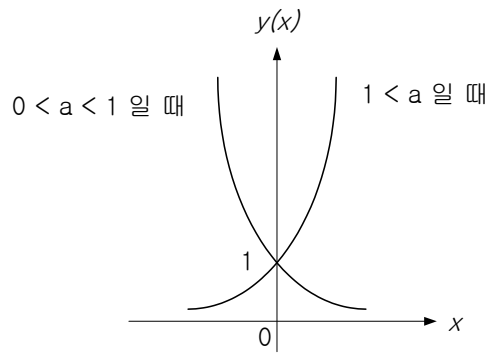
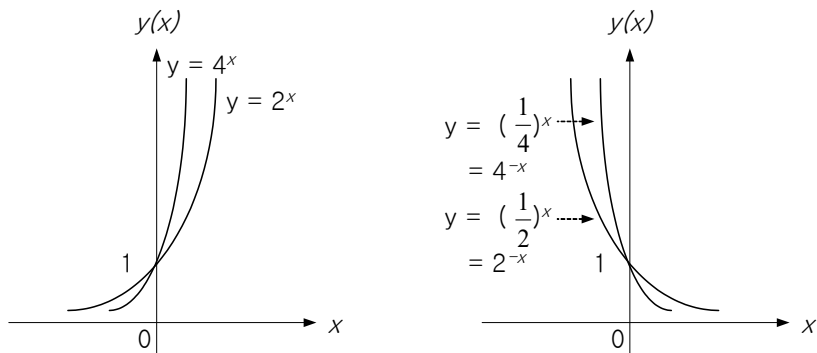


그림 2.4-5 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프

그림 2.4-6의 (a)에서, $1 < a$ 일 때 a 값이 클수록 x 값의 증가에 따른 y 값의 증가속도가 빠르고, 그림 2.4-6의 (b)에서, $0 < a < 1$ 일 때 a 값이 작을수록 x 값의 증가에 따른 y 값의 감소속도가 빠름을 알 수 있다. 또한 $y = (\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$ 이며, $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = 0$ 임을 기억해 두기 바란다.



(a) $y = 2^x$ 와 $y = 4^x$ 의 그래프 (b) $y = (\frac{1}{2})^x$ 와 $y = (\frac{1}{4})^x$ 의 그래프

그림 2.4-6 지수함수의 그래프

정의역이 $x \geq 0$ 일 때, $y = 1 - e^{-cx}$, $c > 0$ 의 그래프는 그림 2.4-7과 같고, c 값이 클수록 y 값은 1로 빨리 수렴한다. $x = c$ 일 때 $y = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$ 이다.

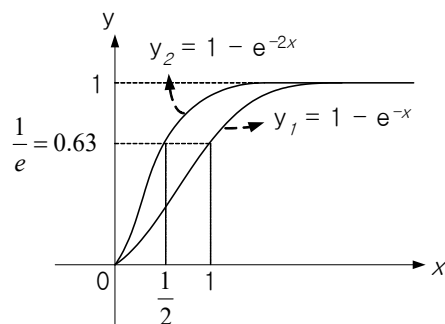


그림 2.4-7 $x \geq 0$ 일 때, $y = 1 - e^{-cx}$, $c > 0$ 의 그래프

(5) 로그함수와 그의 그래프

예를들면, $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_e x = \ln x$, ... 등과 같이

$$y = \log_a x, a \neq 1, a > 0 \quad (2.4-8)$$

형태로 표현되는 함수 $y = f(x)$ 를 a 를 밑으로 하는 x 의 로그함수라고 한다.

식(2.4-7)을 x 에 대하여 풀면, $x = \log_a y$, $a \neq 1$, $a > 0$ 이고, x 와 y 를 바꾸면 식(2.4-8)이 되므로 식(2.4-7)의 지수함수와 식(2.4-8)의 로그함수는 역함수의 관계에 있다.

식(2.4-8)로 정의되는 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프는 그림 2.4-8과 같다.

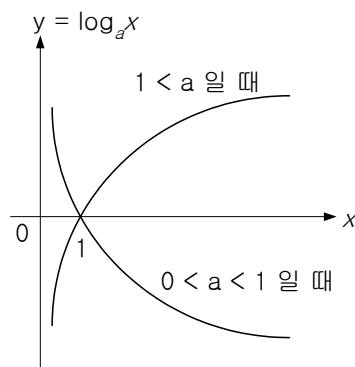


그림 2.4-8 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프

(6) 삼각함수와 그의 그래프

그림 2.4-9에서와 같이, $x-y$ 평면상에 있는 반지름이 1인 단위원 위의 점 P 가 각속도 ω [rad/sec]로 원운동하고 있을 때, 선분 $\overline{OP}$ 와 x 축 사이의 각 $\theta(t)$ 는

$$\theta(t) = \omega t \quad (2.4-9)$$

이고, 점 P 가 단위원을 한 바퀴 도는데 걸리는 시간 즉, 한 주기를 T 초라고 하면 1초 동안의 진동수 또는 주파수 f 는

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.4-10)$$

이다. 주파수의 단위는 Hz이다. 또한 각속도 ω 와 주기 T 사이의 관계는 식(2.4-11a)와 같고, 각속도 ω 와 주파수 f 사이의 관계는 식(2.4-11b)와 같다.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4-11a)$$

$$= 2\pi f \quad (2.4-11b)$$

한편 점 P 가 각속도 ω 로 원운동하고 있을 때, P 의 x 좌표와 y 좌표는 각각 다음의 식들로 기술되며,

$$x = \cos \theta \quad (2.4-12a)$$

$$= \cos \omega t \quad (2.4-12b)$$

$$= \cos 2\pi f t \quad (2.4-12c)$$

$$y = \sin \Theta \quad (2.4-13a)$$

$$= \sin \omega t \quad (2.4-13b)$$

$$= \sin 2\pi f t \quad (2.4-13c)$$

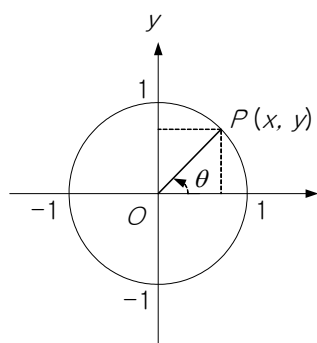


그림 2.4-9 단위원 위에 있는 점 P 의 원운동

삼각함수 $y = \sin \omega t = \sin \frac{2\pi}{T} t$, $y = \cos \omega t = \cos \frac{2\pi}{T} t$, $y = \tan \omega t = \tan \frac{2\pi}{T} t$ 의 그래프는 그림 2.4-10과 같다.

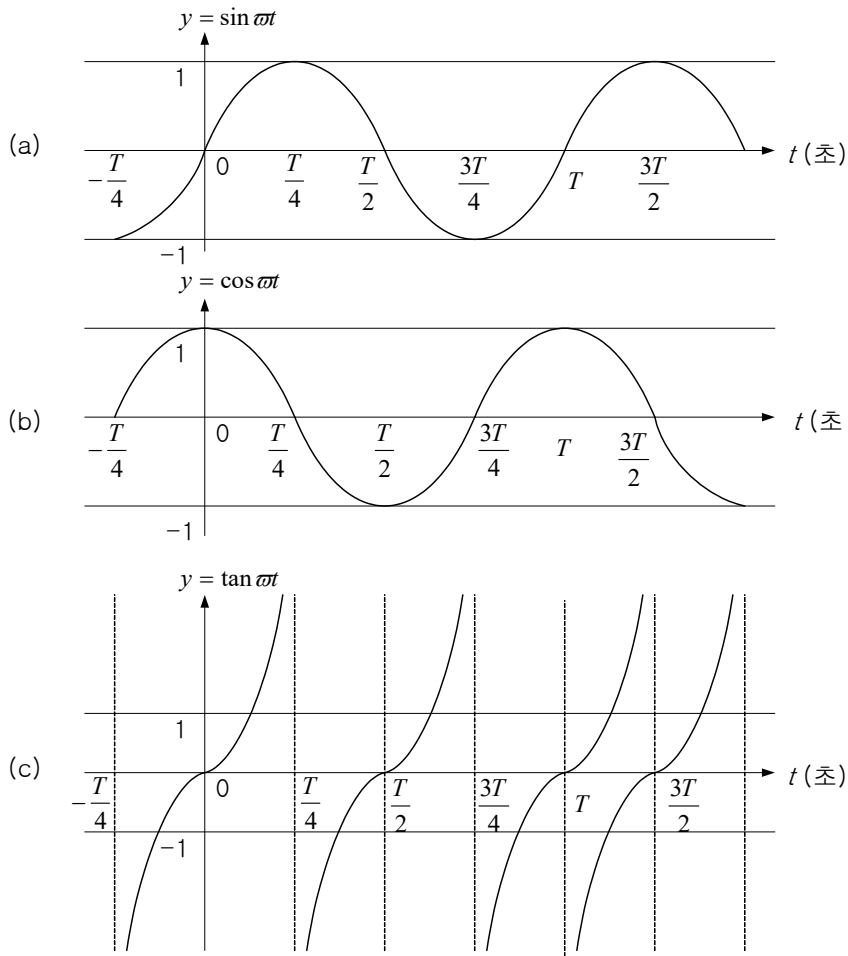


그림 2.4-10 $y = \sin \omega t$, $y = \cos \omega t$, $y = \tan \omega t$ 의 그래프

다음의 식(2.4-14a) 또는 식(2.4-14b)으로 기술되는 함수 $v(t)$ 에 대하여,

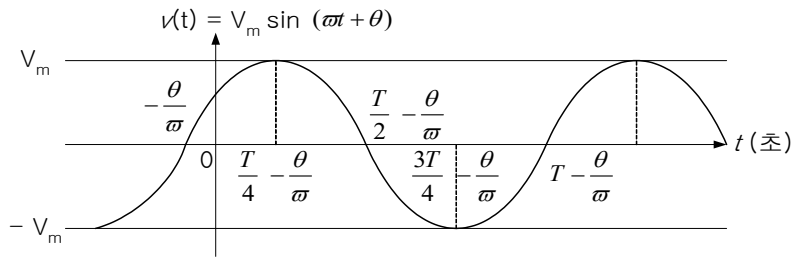
$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin(\omega t + \Theta) \\ &= V_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \Theta\right) \end{aligned} \quad (2.4-14a)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \Theta) \\ &= V_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \Theta\right) \end{aligned} \quad (2.4-14b)$$

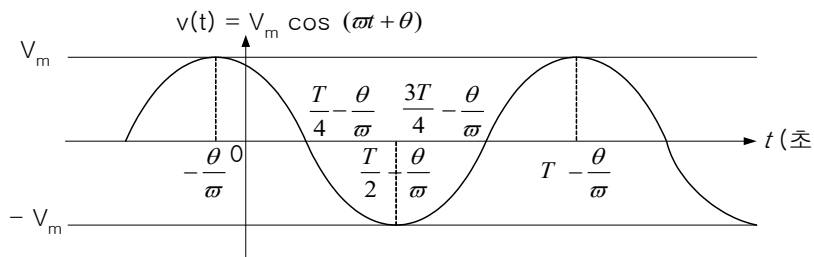
$|V_m|$ 을 함수 $v(t)$ 의 **진폭(amplitude)**이라 하고, ω 를 함수 $v(t)$ 의 **각주파수(angular frequency)**, Θ 를 **위상각(phase angle)**이라고 하며, 식(2.4-14a)로 기술되는 $v(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-11의 (a)의 그래프와 같고, 식(2.4-14b)로 기술되는 $v(t)$ 의 그래프는 그림 2.4-11의 (b)의 그래프와 같다.

$V_m \sin(\omega t + \Theta) = V_m \sin \omega(t + \frac{\Theta}{\omega})$ 이므로 $V_m \sin(\omega t + \Theta)$ 의 그래프는 $V_m \sin \omega t$ 의 그래프를 시간축으로 $\frac{\Theta}{\omega}$ 만큼 **왼쪽으로 이동**시킨 것임을 알 수 있다. 한편, $V_m \sin(\omega t - \Theta) = V_m \sin \omega(t - \frac{\Theta}{\omega})$ 이므로

로 $V_m \sin(\omega t - \theta)$ 의 그래프는 $V_m \sin \omega t$ 의 그래프를 시간축으로 $\frac{\theta}{\omega}$ 만큼 **오른쪽으로 이동**시킨 것이다. 마찬가지로 $V_m \cos(\omega t + \theta) = V_m \cos \omega(t + \frac{\theta}{\omega})$ 이므로 $V_m \cos(\omega t + \theta)$ 의 그래프는 $V_m \cos \omega t$ 의 그래프를 시간축으로 $\frac{\theta}{\omega}$ 만큼 **왼쪽으로 이동**시킨 것이고, $V_m \cos(\omega t - \theta)$ 의 그래프는 $V_m \cos \omega t$ 의 그래프를 시간축으로 $\frac{\theta}{\omega}$ 만큼 **오른쪽으로 이동**시킨 것이다.



(a) $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ 의 그래프



(b) $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ 의 그래프

그림 2.4-11 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ 와 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ 의 그래프

[예제2.4-1 : 삼각함수에 관련된 용어] 그림 2.4-12와 같은 삼각함수 $v(t)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) $v(t)$ 의 주기 T , 주파수 f , 각주파수 ω , 진폭 V_m 을 구하여라.
- (2) $v(t)$ 를 sine 함수로 나타내어라.
- (3) $v(t)$ 를 cosine 함수로 나타내어라.

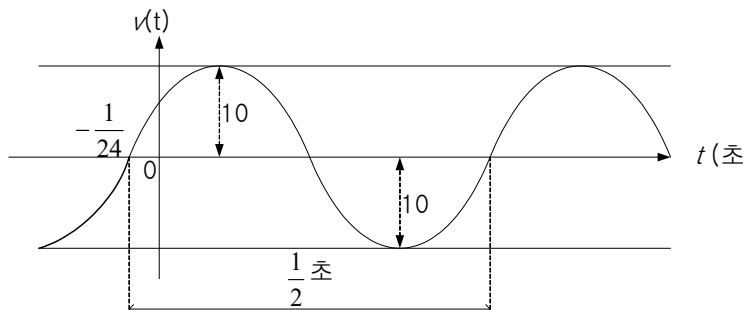


그림 2.4-12 [예제2.4-1]의 함수

[풀이]

(1) 그림 2.4-12로부터, 주기 $T = \frac{1}{2}$ [초], 주파수 $f = \frac{1}{T} = 2$ [Hz], 각주파수 $\omega =$

$2\pi f = 4\pi$ [rad/sec], 진폭 $V_m = 10$ 이다.

(2) 그림 2.4-12에서, $v(t)$ 는 $V_m \sin \omega t$ 를 왼쪽으로 $\frac{1}{24}$ 만큼 이동한 것이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin(\omega t + \Theta) \\ &= V_m \sin \omega(t + \frac{\Theta}{\omega}) \\ &= 10 \sin 4\pi(t + \frac{1}{24}) \end{aligned}$$

이다.

(3) 그림 2.4-12에서, $v(t)$ 는 $V_m \cos \omega t$ 를 오른쪽으로 $\frac{1}{4} T - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ 만큼 이동한 것이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t - \Theta) \\ &= V_m \cos \omega(t - \frac{\Theta}{\omega}) \\ &= 10 \cos 4\pi(t - \frac{1}{12}) \end{aligned}$$

이다.

[예제 2.4-2 : 삼각함수에 관련된 용어] 다음의 삼각함수에서, $v(t)$ 의 각주파수 ω , 주파수 f , 주기 T , 진폭 V_m 은 얼마인 가?

(1) $v(t) = 5 \sin 10\pi t$

(2) $v(t) = 20 \sin(100t - \frac{\pi}{6})$

(3) $v(t) = -20 \cos \pi t$

(4) $v(t) = 220\sqrt{2} \cos(377t + \frac{\pi}{4})$

[풀이]

(1) 각주파수 $\omega = 10\pi$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0.2$ [초], 진폭 $V_m = 5$ 이다.

(2) 각주파수 $\omega = 100$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{\pi}$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{50}$ [초], 진폭 $V_m = 20$ 이다.

(3) 각주파수 $\omega = \pi$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.5$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = 2$ [초], 진폭 $V_m = 20$ 이다.

(4) 각주파수 $\omega = 377$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} \doteq 60$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60}$

[초], 진폭 $V_m = 220\sqrt{2}$ 이다.

(7) 함수의 이동

함수 $y = f(t)$ 를 시간 t 축으로 T 만큼, y 축으로 b 만큼 이동시킨 함수 y_1 은 $y_1 = f(t - T) + b$ 이다. $T > 0$ 이면 오른쪽으로 T 만큼 이동하고, $T < 0$ 이면 왼쪽으로 $|T|$ 만큼 이동한다. $b > 0$ 이면 위쪽으로 b 만큼 이동하고, $b < 0$ 이면 아래쪽으로 $|b|$ 만큼 이동한다. 예를들어, $y = f(t)$ 를 t 축으로 2만큼, y 축으로 1만큼 이동시킨 함수 $y_1 = f(t - 2) + 1$ 의 그래프와 $y = f(t)$ 를 t 축으로 -2만큼, y 축으로 -1만큼 이동시킨 함수 $y_2 = f(t + 2) - 1$ 의 그래프는 그림 2.4-13과 같다.

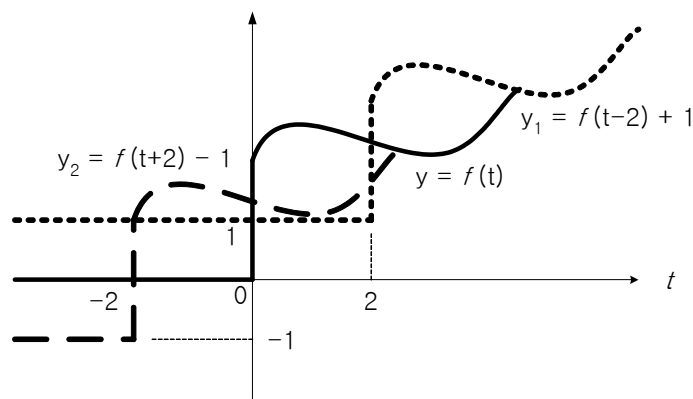


그림 2.4-13 $y_1 = f(t - 2) + 1$ 와 $y_2 = f(t + 2) - 1$ 의 그래프

구체적으로, 단위계단함수 $u_s(t)$ 를 t 축으로 2초만큼 이동시킨 함수 $u_s(t - 2)$ 를 식으로 나타내면 다음의 식(2.4-15)와 같고, $u_s(t - 2)$ 의 그래프는 그림 2.4-14의 (a)와 같다.

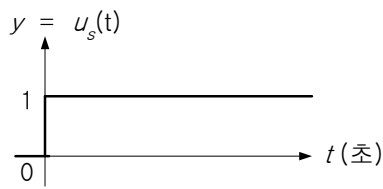
$$u_s(t - 2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases} \quad (2.4-15)$$

단위램프함수 $r_s(t)$ 를 t 축으로 1초만큼 이동시킨 함수 $r_s(t - 1)$ 을 식으로 나타내면 다음의 식(2.4-16)과 같고, $r_s(t - 1)$ 의 그래프는 그림 2.4-14의 (b)와 같다.

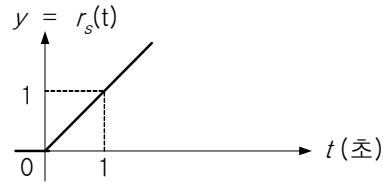
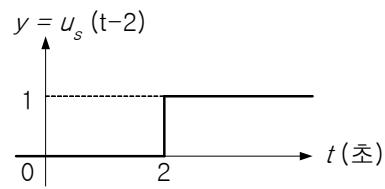
$$\begin{aligned} r_s(t - 1) &= \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t, & t > 1 \end{cases} \\ &= (t - 1) u_s(t - 1) \end{aligned} \quad (2.4-16)$$

임펄스함수 $\delta(t)$ 를 t 축으로 2초만큼 이동시킨 $\delta(t - 2)$ 를 식으로 나타내면 다음의 식 (2.4-17)과 같고, $\delta(t - 2)$ 의 그래프는 그림 2.4-14의 (c)와 같다.

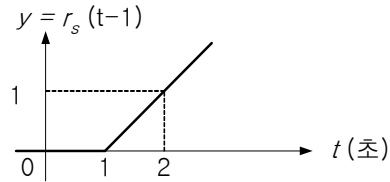
$$\delta(t - 2) = \begin{cases} \infty, & t = 2 \\ 0, & t \neq 2 \end{cases} \quad (2.4-17)$$



(a)



(b)



(c)

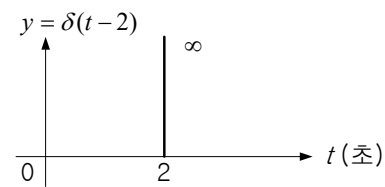


그림 2.4-14 함수의 이동

[예제2.4-3 : 단위계단함수와 단위램프함수로의 표현] 다음 그림 2.4-15에 도시된 함수 $f(t)$ 를 단위계단함수 $u_s(t)$ 와 단위램프함수 $r_s(t)$ 로 나타내시오.

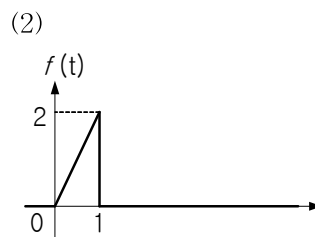
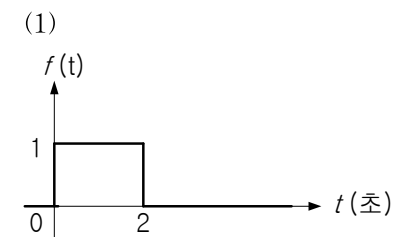


그림 2.4-15 [예제2.4-1]의 그림

[풀이]

(1) 그림 2.4-16으로부터, $f(t) = u_s(t) - u_s(t-2)$ 이다.

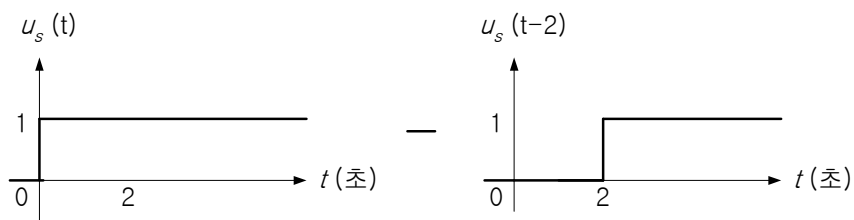


그림 2.4-16

(2) 그림 2.4-17의 (a)로부터,

$$\begin{aligned} f_3(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= 2r_s(t) - 2r_s(t-1)u_s(t-1) \end{aligned}$$

이고, 그림 2.4-17의 (b)로부터,

$$\begin{aligned} f(t) &= f_3(t) + f_4(t) \\ &= 2r_s(t) - 2r_s(t-1)u_s(t-1) - 2u_s(t-1) \end{aligned}$$

이다.

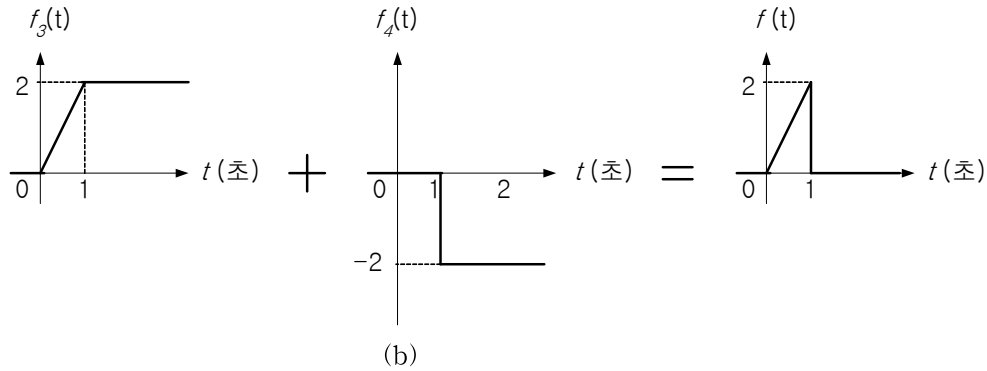
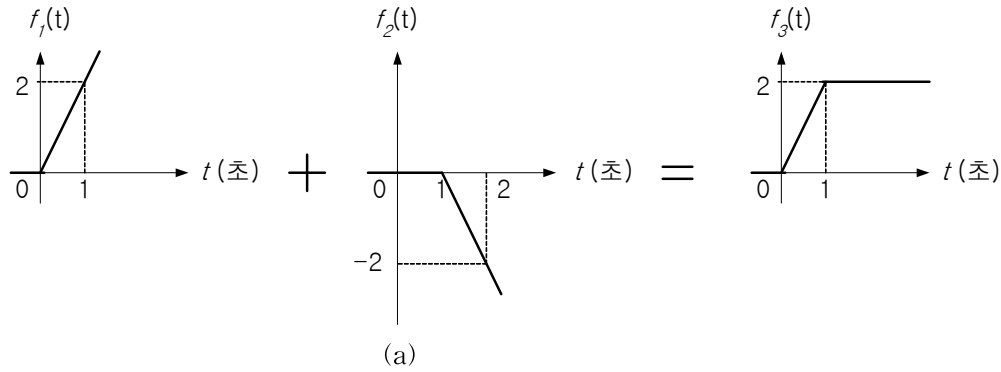


그림 2.4-17

삼각함수 $v(t) = V_m \sin \omega t$ 를 시간 t 축으로 a 만큼 이동시킨 함수는 $v(t) = V_m \sin \omega(t - a)$ 이며, $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ 의 그래프는 그림 2.4-11의 (a)와 같다.

지수함수 $y(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 를 시간 t 축으로 1만큼 이동시킨 함수는

$y_1(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$ 또는 $y_1(t) = e^{-2(t-1)}u_s(t-1)$ 이고 그래프는 그림 2.4-18과 같으며,

$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 를 시간 t 축으로 1만큼 이동시킨 함수는

$y_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$ 또는 $y_1(t) = \{1 - e^{-2(t-1)}\}u_s(t-1)$ 이고 그래프는 그림 2.4-19

와 같다.

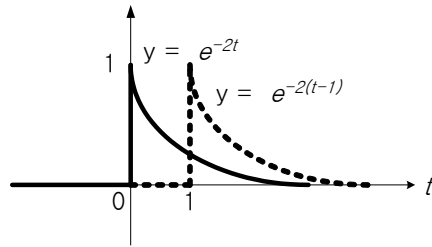


그림 2.4-18 $y_1(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$ 의 그래프

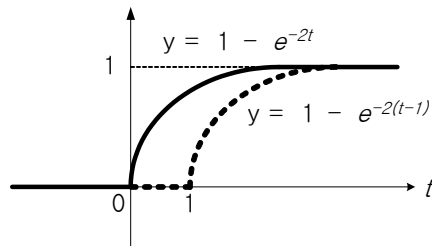


그림 2.4-19 $y_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$ 의 그래프

(7) 두 함수의 곱으로 표현된 함수의 그래프

$t \geq 0$ 에서, 램프함수와 지수함수의 곱으로 표현된 함수

$$y = 2te^{-2t}, \quad (2.4-18)$$

의 그래프와 지수함수와 삼각함수의 곱으로 표현된 함수

$$y = 4e^{-2t} \sin 2\pi t, \quad (2.4-19)$$

$$y = 4e^{-2t} \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{6} \right), \quad (2.4-20)$$

$$y = 2 + 4e^{-2t} \sin \left(2\pi t - \frac{\pi}{6} \right) \quad (2.4-21)$$

의 그래프에 대하여 살펴보자.

$y = 2te^{-2t}$ 는 $y_1 = t$ 와 $y_2 = 2e^{-2t}$ 의 곱이므로 $y = 2te^{-2t}$ 의 그래프는 그림 2.4-20의 그래프와 같다.

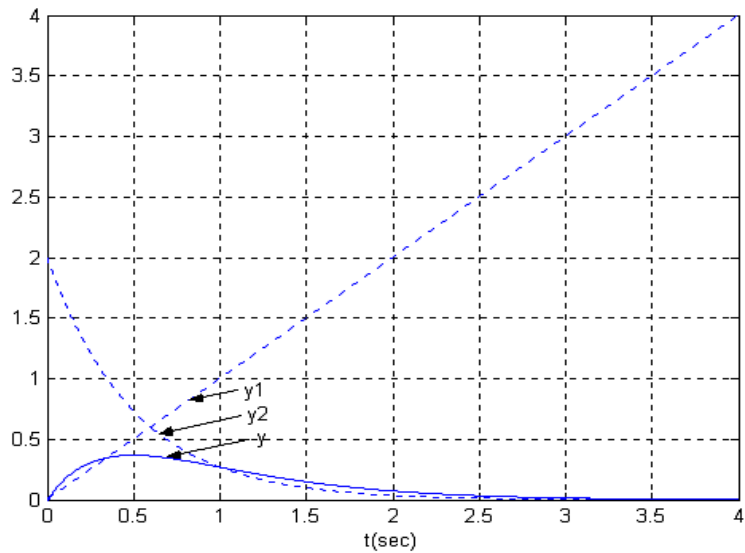


그림 2.4-20 $y = te^{-2t}$ 의 그래프

$y_1 = 4e^{-2t}$, $y_2 = -4e^{-2t}$, $y_3 = \sin 2\pi t$ 라 할 때, $y = 4e^{-2t}\sin 2\pi t$ 는 y_1 과 y_3 의 곱이므로 $y = 4e^{-2t}\sin 2\pi t$ 의 그래프는 그림 2.4-21의 그래프와 같다.

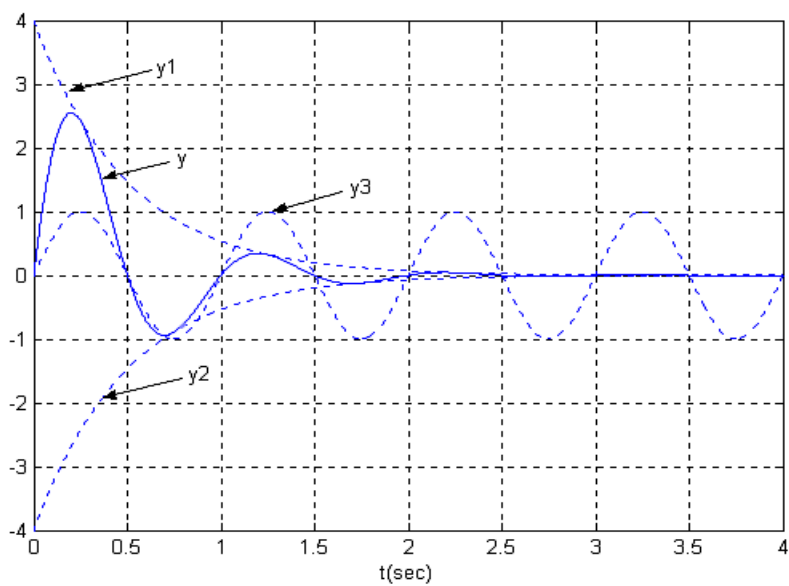


그림 2.4-21 $y = 4e^{-2t}\sin 2\pi t$ 의 그래프

$y_1 = 4e^{-2t}$, $y_2 = -4e^{-2t}$, $y_3 = \sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ 라 할 때, $y = 4e^{-2t}\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ 는 y_1 과 y_3 의 곱이므로 그래프는 그림 2.4-22의 그래프와 같다.

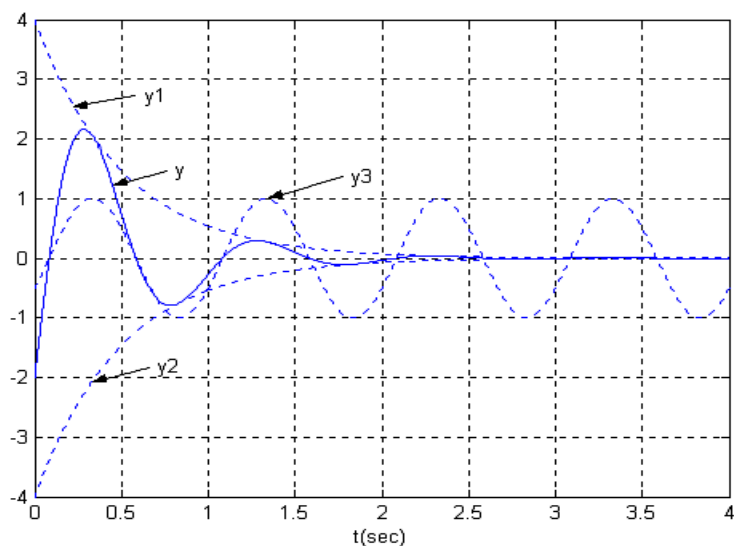


그림 2.4-22 $y = 4e^{-2t}\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ 의 그래프

$y = 2 + 4e^{-2t}\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ 의 그래프는 그림 2.4-23의 그래프와 같다.

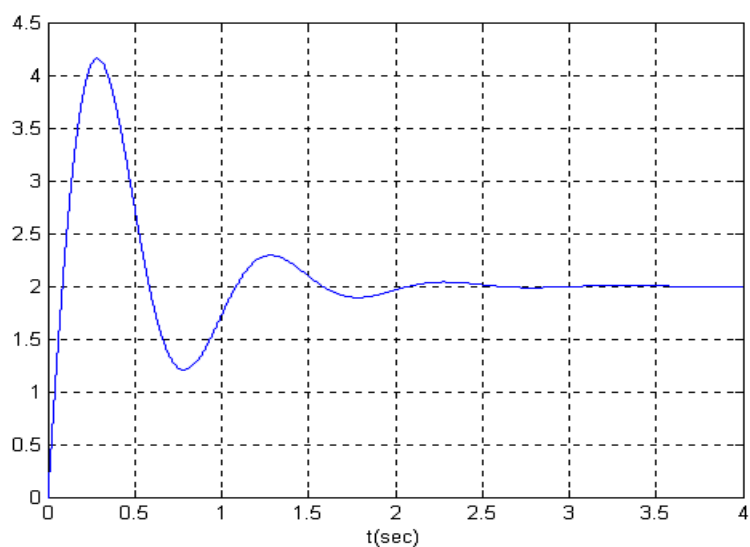


그림 2.4-23 $y = 2 + 4e^{-2t}\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ 의 그래프

2.5 미분

2.5.1 함수의 극한

그림 2.5-1에서와 같이 함수 $f(x)$ 에서, x 가 a 에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$ 가 **한정된 값** L 에 한없이 가까이 가면, L 을 x 가 a 에 접근할 때 $f(x)$ 의 **극한** 또는 **극한값**이라고 정의하고,

$$x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

x 가 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$ 의 값이 L 에 한없이 가까이 가면,

$$x \rightarrow a^{-0} \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a^{-0}} f(x) = L$$

로 나타내며, L 을 $f(x)$ 의 **좌극한값**이라 한다. 마찬가지로, x 가 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$ 의 값이 L 에 한없이 가까이 가면,

$$x \rightarrow a^{+0} \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a^{+0}} f(x) = L$$

로 나타내며, L 을 $f(x)$ 의 **우극한값**이라 한다.

좌극한값과 우극한값이 한정된 값으로 같을 때 $x=a$ 에서 $f(x)$ 의 **극한값이 존재한다** 혹은 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 **극한을 가진다**고 하고 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 로 나타낸다. 좌극한값과 우극한값이 같지

않거나 또는 무한대의 값을 가질 때에는 극한이 존재하지 않는다고 한다. 무한대 ∞ 는 숫자가 아니고 상당히 큰 수보다 더 커지는 상태를 나타내는 기호이다.

함수 $f(x)$ 에서, $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 양의 값으로 무한히 커지면, $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 는 **양의 무한대로 발산**한다고 하고,

$$x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow +\infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

로 나타내며, $f(x)$ 의 극한은 $+\infty$ 라고 한다. 마찬가지로, $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 음의 값으로 무한히 커지면, $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 는 **음의 무한대로 발산**한다고 하고,

$$x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow -\infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

로 나타내며, $f(x)$ 의 극한은 $-\infty$ 라고 한다.

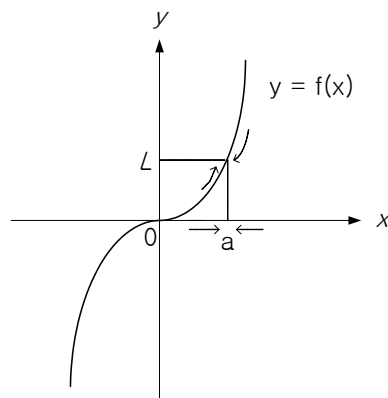


그림 2.5-1 함수 $f(x)$ 의 극한

다음은 함수의 극한에 관련된 기본법칙들이다.

만약 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재한다면,

$$(a) \text{ 합법칙과 차법칙 : } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(b) \text{ 상수곱법칙 : } \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ 여기서 } k \text{는 임의의 상수}$$

$$(c) \text{ 곱법칙 : } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(d) \text{ 상법칙 : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ 여기서 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$(e) f(x) < g(x) \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

이다.

위의 식들에서, f 와 g 가 $x=a$ 에서 정의되면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이고

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 이다.

다음의 극한값 e 를 자연상수라 부르며, 공학에서 많이 나오기 때문에 기억해 두기 바란다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x \\ &= 2.71828\cdots \\ &= e \end{aligned}$$

(2.5-1)

[예제2.5-1 : 극한에 관한 기본법칙의 응용] 다음 극한들을 구하여라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - |x| + 2) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} (2x+1)(4|x|-1)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{(|x|+2)} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

[풀이]

(1) 극한의 합법칙, 차법칙과 상수곱법칙에 의하여,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - |x| + 2) &= \lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} |x| + \lim_{x \rightarrow -1} 2 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} |x| + \lim_{x \rightarrow -1} 2 \\ &= 2 \times 1 - 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

이다.

(2) 극한의 곱법칙, 합법칙, 차법칙, 상수곱법칙에 의하여,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x+1)(4|x|-1) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x+1) \lim_{x \rightarrow -1} (4|x|-1)$$

$$= (-2 + 1)(4 - 1) \\ = -3$$

이다.

(3) 극한의 상법칙, 상수곱법칙, 합법칙에 의하여,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{(|x| + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} 3x^2}{\lim_{x \rightarrow -2} (|x| + 2)} \\ = \frac{3 \times 4}{2 + 2} \\ = 3$$

이다.

(4) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = 0$ 이기 때문에 본래의 식에 상법칙을 적용할 수 없다. 그러나 분모와 분자를 인수분해하면 $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x^2 - 1)$ 과 $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ 이므로 $(x+2)$ 가 상쇄되므로,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 1)}{(x+2)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ = \frac{4 - 1}{-2 - 2} \\ = -\frac{3}{4}$$

이다.

이제 회로이론에서 많이 나오는 함수들에 대하여, $t = 0^+$ 와 $t = \infty$ 에서의 극한값에 대하여 살펴보자. 시간은 흘러가기 때문에 어떤 **기준시각을 $t = 0$ 으로** 한다. 예를들어, 스위치를 조작하는 순간을 $t = 0$ 으로 하면, $t = 0^+$ 는 스위치 조작직후를 의미하고, $t = 0^-$ 는 스위치 조작직전을 의미하며, $t = 3$ 은 스위치를 조작한 후 3초인 시간을, $t = -3$ 은 스위치를 조작하기 전 3초인 시간을 의미한다. 공학에서 $t = \infty$ 는 시간이 충분히 흘렀을 때를 의미한다.

(A) 계단함수의 극한 : 식(2.4-1b)의 계단함수에서, $t = 0$ 에서 우극한은 k 이고 좌극한은 0이므로 수학적 극한은 존재하지 않으나, $t \geq 0$ 의 범위에서만 생각하면 극한은 우극한으로 한정하여 생각할 수 있다. 스위치를 조작하는 순간을 $t = 0$ 으로 기준하면 $t \geq 0$ 의 범위는 스위치를 조작한 이후의 시간을 의미하고, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ 는 스위치를 조작한 직후의 시간에서의 $u(t)$ 의 값을 의미하며,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = k \quad (2.5-2)$$

이다. 시간이 충분히 흘렀을 때 $u(t)$ 의 값 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ 는 다음의 식(2.5-3)과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = k \quad (2.5-3)$$

(B) 램프함수의 극한 : 식(2.4-3b)의 램프함수에서,

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0 \quad (2.5-4)$$

이고,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty \quad (2.5-5)$$

이다.

(C) 지수함수의 극한 : 다음의 식(2.5-6)의 지수함수에서,

$$y(t) = k e^{-ct}, \quad c \neq 0, \quad t \geq 0 \quad (2.5-6)$$

$t = 0^+$ 에서 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = k$$

이고, $t = \infty$ 에서 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad c > 0 \quad (2.5-7a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty, \quad c < 0 \quad (2.5-7b)$$

이다. 또한 식(2.5-8)의 지수함수에서,

$$y(t) = k_1 - k_2 e^{-ct}, \quad c \neq 0, \quad t \geq 0 \quad (2.5-8)$$

$t = 0^+$ 에서 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = k_1 - k_2$$

이고, $t = \infty$ 에서 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k_1, \quad c > 0 \quad (2.5-9a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{cases} -\infty, & k_2 > 0 \text{ 그리고 } c < 0 \\ +\infty, & k_2 < 0 \text{ 그리고 } c < 0 \end{cases} \quad (2.5-9b)$$

이다.

[예제2.5-2 : 지수함수의 극한] 다음 극한들을 구하여라.

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} e^{-3t} \text{ 와 } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3t} \quad (2) \lim_{t \rightarrow 0} e^{0.0002t} \text{ 와 } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{0.0002t}$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0} (1 - e^{-3t}) \text{ 와 } \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-3t})$$

$$(4) \lim_{t \rightarrow 0} (2 - e^{0.0002t}) \text{ 와 } \lim_{t \rightarrow \infty} (2 - e^{0.0002t})$$

[풀이]

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} e^{-3t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3t} = 0$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} e^{0.0002t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{0.0002t} = \infty$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0} (1 - e^{-3t}) = 1 - 1 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-3t}) = 1 - 0 = 1$$

$$(4) \lim_{t \rightarrow 0} (2 - e^{0.0002t}) = 2 - 1 = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (2 - e^{0.0002t}) = 2 - \infty = -\infty$$

(D) 삼각함수의 극한 : 다음의 식(2.5-10)의 sine함수나 식(2.5-11)의 cosine함수는 시간이 아무리 흐르더라도 주기적으로 변하기 때문에 $t = \infty$ 에서 극한은 존재하지 않는다.

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad (2.5-10)$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (2.5-11)$$

그러나, $t = 0$ 에서 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = 0 \quad (2.5-12)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} i(t) = I_m \quad (2.5-13)$$

(E) 곱으로 표현된 초월함수의 극한 : 극한에 관한 성질과 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 초월함수들의 극한을 예제를 통하여 구해보자.

[예제2.5-3] 다음 함수들의 $t = 0$ 와 $t = \infty$ 에서 극한값을 구하여라.

$$(1) v_1(t) = 3e^{-2t} \sin 10t \quad (2) v_2(t) = 3e^{2t} \sin 10t \quad (3) v_3(t) = t \sin \frac{1}{t}$$

$$(4) v_4(t) = \sin t \cos \frac{1}{t} \quad (5) v_5(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (6) v_6(t) = \frac{\sin 2t}{\sin t}$$

[풀이]

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} v_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 3e^{-2t} \lim_{t \rightarrow 0} \sin 10t = 3 \times 1 \times 0 = 0 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3e^{-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \sin 10t = 3 \times 0 \times \lim_{t \rightarrow \infty} \sin 10t \text{ 에서,}$$

$|\sin 10t| \leq 1$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = 0$ 이다. 즉, t 가 커짐에 따라 감쇠진동하여

$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t)$ 는 0으로 된다.

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} v_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 3e^{2t} \lim_{t \rightarrow 0} \sin 10t = 3 \times 1 \times 0 = 0 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3e^{2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \sin 10t = 3 \times \infty \times \lim_{t \rightarrow \infty} \sin 10t \text{ 에서, } \sin 10t \text{ 는}$$

-1과 +1 사이를 진동하므로 t 가 커짐에 따라 $v_2(t) = 3e^{2t} \sin 10t$ 는 진동하며 발산하므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t)$ 는 존재하지 않는다.

$$(3) \left| \sin \frac{1}{t} \right| \leq 1 \text{ 이므로 } 0 \leq \left| t \sin \frac{1}{t} \right| = |t| \left| \sin \frac{1}{t} \right| \leq |t| \text{ 이다. 그런데, } \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0$$

이므로 $\lim_{t \rightarrow 0} |t \sin \frac{1}{t}| = 0$ 이다, 따라서, $\lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t} = 0$ 이다.

t 는 t 가 커짐에 따라 커지고 $\sin \frac{1}{t}$ 는 -1 과 $+1$ 사이를 진동하므로 t 가 커

짐에 따라 $v_3(t) = t \sin \frac{1}{t}$ 는 진동발산하므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} v_3(t)$ 는 존재하지 않는다.

(4) $|\cos \frac{1}{t}| \leq 1$ 이므로 $0 \leq |\sin t \cos \frac{1}{t}| = |\sin t| |\cos \frac{1}{t}| \leq |\sin t|$ 이다. 그런데,

$\lim_{t \rightarrow 0} |\sin t| = 0$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 0} |\sin t \cos \frac{1}{t}| = 0$ 이다,

따라서, $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t \cos \frac{1}{t} = 0$ 이다. $\sin t$ 와 $\cos \frac{1}{t}$ 는 t 가 커짐에 따라

-1 과 $+1$ 사이를 진동하므로 $v_4(t) = \sin t \cos \frac{1}{t}$ 또한 진동한다.

따라서, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_4(t)$ 는 존재하지 않는다.

(5) 로피탈의 정리에 의하여, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1$ 이다.

$\frac{1}{t}$ 는 t 가 커짐에 따라 점점 작아지고 $\sin t$ 는 -1 과 $+1$ 사이를 진동하므로

t 가 커짐에 따라 $v_5(t) = \frac{\sin t}{t}$ 는 감쇠진동하고, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$ 이다.

(6) $v_6(t) = \frac{\sin 2t}{\sin t} = \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t} = 2 \cos t$ 이므로,

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos 2t = 2$ 이고, $2 \cos t$ 는 진동하므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin 2t}{\sin t}$ 는 존

재하지 않는다.

<< 로피탈(L'Hospital)의 정리 >>

함수 $f(t)$, $g(t)$ 가 a 를 포함하는 구간에서 미분가능하고,

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0$$

이며, $t \rightarrow a$ 일 때 $\frac{f'(t)}{g'(t)}$ 의 극한값이 존재하면

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

가 성립한다.

2.5.2 연속함수

함수 $y = f(t)$ 가 (i) $t = a$ 에서 정의되어 있고, (ii) $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ 가 존재하며, (iii) $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$

일 때, 이 함수는 $t=a$ 에서 연속이라고 한다. 또 함수 $f(t)$ 가 $t=a$ 에서 연속이 아닐 때 $t=a$ 에서 불연속이라 하고, a 를 불연속점이라 한다. 함수 $y=f(t)$ 가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속이면 함수 $f(t)$ 는 그 구간에서 연속이다 또는 그 구간에서 연속인 함수라고 한다. 그림 2.5-2는 연속함수와 불연속함수의 예이다.

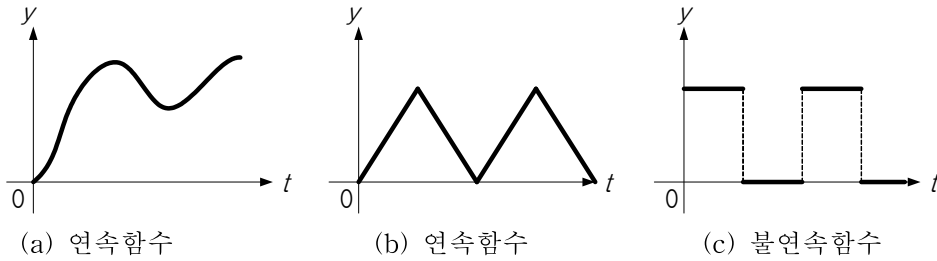


그림 2.5-2 연속함수와 불연속함수의 예

2.5.3 변화율과 도함수

평균변화율, 순간변화율과 도함수의 정의에 대하여 살펴보자.

평균변화율 : 그림 2.5-3에서와 같이, 함수 $y=f(t)$ 에서 t 의 값이 a 부터 $a+\Delta t$ 까지 변할 때 y 의 값이 Δy 만큼 변한다고 하면,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t} \quad (2.5-14)$$

를 구간 $[a, a+\Delta t]$ 에서의 y 의 평균변화율이라고 한다. 그림 2.5-3에서 평균변화율은 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기임을 알 수 있다.

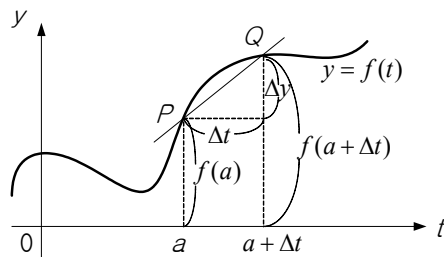


그림 2.5-3 평균변화율

순간변화율 : 그림 2.5-4에서와 같이, 함수 $y=f(t)$ 에서 구간 $[a, a+\Delta t]$ 에서의 평균변화율의 $\Delta t \rightarrow 0$ 일 때의 극한값

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t} \quad (2.5-15)$$

를 함수 $f(t)$ 의 $t=a$ 에서의 순간변화율 또는 변화율 또는 미분계수라 하고

$$f'(a), y|_{t=a}, \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=a}$$

로 나타낸다. 그림 2.5-4에서 변화율은 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기임을 알 수 있다.

식(2.5-15)의 극한값이 존재하면 함수 $f(t)$ 는 $t=a$ 에서 미분가능하다고 한다. 함수 $f(t)$ 가 $t=a$

에서 미분가능하면 $f(t)$ 는 $t=a$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$ 이다. 또한 함수 $f(t)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하면 $f(t)$ 는 그 구간에서 연속이다. 그러나 연속함수라고 해서 항상 미분가능한 것은 아니다. 예를 들어, 그림 2.5-2의 (b)의 함수는 모든 구간에서 연속이지만 모든 구간에서 미분가능한 것은 아니다.

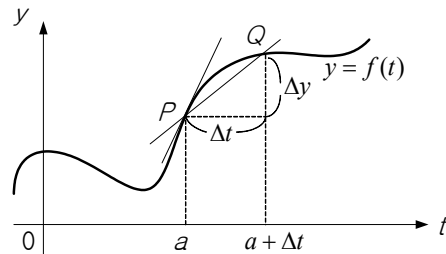


그림 2.5-4 변화율

도함수 : 그림 2.5-5에서와 같이, 함수 $y = f(t)$ 에서

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (2.5-16)$$

를 t 에 관한 y 의 도함수(derivative)라 하고,

$$y', f'(t), \frac{dy}{dt}, \frac{df(t)}{dt}, \frac{d}{dt} f(t)$$

등으로 나타낸다. 그림 2.5-5에서 **도함수는 임의의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기**임을 알 수 있다.

함수 $f(t)$ 에서 도함수 $f'(t)$ 를 구하는 것을 $f(t)$ 를 t 에 관하여 **미분한다**고 말하고, 그 계산법을 미분법이라 부른다.

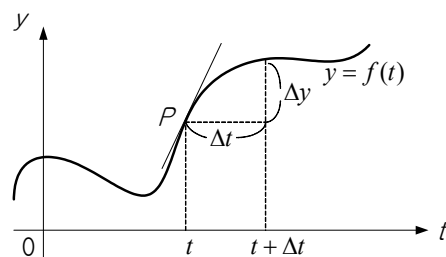


그림 2.5-5 도함수

2.5.4 미분법과 여러 가지 함수의 도함수

먼저 미분법에 대하여 살펴보자. 미분가능한 두 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 에 대하여, 미분법에 관한 기본 공식은 다음과 같고,

- (1) $\{f(t) \pm g(t)\}' = f'(t) \pm g'(t)$
- (2) $\{cf(t)\}' = cf'(t)$, 여기서 c 는 상수
- (3) $\{f(t)g(t)\}' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$
- (4) $\left\{\frac{f(t)}{g(t)}\right\}' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{\{g(t)\}^2}$, 단 $g(t) \neq 0$

합성함수의 미분법은 다음과 같다.

- (5) $y = f(u)$, $u = g(t)$ 이면, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt}$ 이다.
- 즉, $y = f(g(t))$ 에서 $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\{f(g(t))\} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}$ 이다.
- 따라서, $y = f(at + b)$ 일 때 $\frac{dy}{dt} = \frac{df(at + b)}{d(at + b)} a$ 이고,
- $y = \{f(t)\}^n$ 일 때, $\frac{dy}{dt} = n\{f(t)\}^{n-1} \frac{df(t)}{dt}$ 이며,
- $y = \sqrt{f(t)}$ 일 때, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{f(t)}} \frac{df(t)}{dt}$ 이다.

[예] $y = (t^2 + 3t + 1)^2$ 에서 $\frac{dy}{dt}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u = t^2 + 3t + 1 \text{ 이라고 놓으면 } y = u^2 \text{ 이고 } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} \text{ 이다.}$$

$$\text{한편 } \frac{dy}{du} = 2u = 2(t^2 + 3t + 1), \quad \frac{du}{dt} = 2t + 3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} \\ &= 2(t^2 + 3t + 1)(2t + 3) \end{aligned}$$

이다.

또한 매개변수함수의 미분법은 다음과 같다.

(6) $x = f(t)$, $y = g(t)$ 에서 역함수 $t = f^{-1}(x)$ 가 존재하고 다 같이 미분가능이면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \left(\frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

이다.

[예] $x = \sqrt{t}$, $y = t^2 + 2t + 1$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ 이고 } \frac{dy}{dt} = 2t + 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2t+2}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \\ &= 2x(2x^2+2)\end{aligned}$$

이다.

한편 **음함수의 미분법**은 다음과 같다.

(7) 예를 들어, $x^2 + y^2 = 4$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구해보자. y 를 x 의 함수로 보고 합성함수의 미분법에 따르면 $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ 이다. 따라서, $y \neq 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 이다.

이제 여러 가지 함수의 미분에 대하여 살펴보자. 2.5.3절에서 소개한 미분의 정의와 앞에서 기술한 미분법의 공식을 이용하면 여러 가지 함수들의 도함수를 구할 수 있으며 여기서는 결과만을 소개하였다.

① $f(x) = c$ (상수)이면 $f'(x) = 0$ 이다.

② $y = x^n$ 이면 $y' = nx^{n-1}$ 이고, $y = (ax+b)^n$ 이면 $y' = n(ax+b)^{n-1}a$ 이다.

예를 들어, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(4x^3)' = 12x^2$, ... 이고,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \text{ 이}$$

$$\text{며, } (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}} \text{ 이다.}$$

또한, 합성함수의 미분법에 의하여

$$(2x+3)' = 2, \quad \{(2x+3)^2\}' = 2(2x+3)2 = 4(2x+3),$$

$$\{(2x+3)^3\}' = 3(2x+3)^2 2 = 6(2x+3)^2, \quad \dots \text{ 이고,}$$

$$\left(\frac{1}{3x-2}\right)' = \{(3x-2)^{-1}\}' = -1(3x-2)^{-2} 3 = -\frac{3}{(3x-2)^2},$$

$$\left\{\frac{1}{(3x+1)^2}\right\}' = \{(3x+1)^{-2}\}' = -2(3x+1)^{-3} 3 = -\frac{6}{(3x+1)^3} \text{ 이며,}$$

$$(\sqrt{3x+1})' = \{(3x+1)^{\frac{1}{2}}\}' = \frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}},$$

$$(\sqrt[3]{3x+1})' = \{(3x+1)^{\frac{1}{3}}\}' = \frac{1}{3}(3x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(3x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3^3\sqrt[3]{(3x+1)^2}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)' = \{(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\}' = -\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = -\frac{3}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}\right)' = \{(3x+1)^{-\frac{1}{3}}\}' = -\frac{1}{3}(3x+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3 = -\frac{1}{(3x+1)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{3x+1}}$$

이다.

③ $y = \sin x$ 이면 $y' = \cos x$ 이고, $y = \sin(ax+b)$ 이면 $y' = \cos(ax+b)a$ 이며,
 $y = \sin f(x)$ 이면 $y' = \cos f(x)f'(x)$ 이다.

④ $y = \cos x$ 이면 $y' = -\sin x$ 이고, $y = \cos(ax+b)$ 이면 $y' = -\sin(ax+b)a$
 이며, $y = \cos f(x)$ 이면 $y' = -\sin f(x)f'(x)$ 이다.

⑤ $y = e^x$ 이면 $y' = e^x$ 이고, $y = e^{ax}$ 이면 $y' = e^{ax}a$ 이며,
 $y = e^{f(x)}$ 이면 $y' = e^{f(x)}f'(x)$ 이다.

⑥ $y = a^x$ 이면 $y' = a^x \ln a$ 이고, $y = a^{f(x)}$ 이면 $y' = a^{f(x)} \ln a f'(x)$ 이다.

⑦ $y = \ln x$ 이면 $y' = \frac{1}{x}$ 이고, $y = \ln f(x)$ 이면 $y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$ 이다.

⑧ $y = \log_a x$ 이면 $y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$ 이다.

[예제 2.5-4 : 도함수] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

(1) $y = 4x^3 - 2x + 5$ (2) $y = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)$

(3) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ (4) $y = x^3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

(5) $y = x^6 + 2\sqrt{3x}$ (6) $y = x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3x}}$

[풀이] 미분공식에 의하여,

(1) $\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 2$

(2) $\frac{dy}{dx} = (x^2 - 2x + 2) \times 1 + (2x - 2) \times (x - 1)$
 $= 3x^2 - 6x + 4$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1) \times 1 - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(4) \quad y = x^3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = x^3 + 2x^{-1} - 3x^{-2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x^{-2} + 6x^{-3}$$

$$= 3x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$

$$\text{또는 } y = x^3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \frac{x \times 0 - 2 \times 1}{x^2} - \frac{x^2 \times 0 - 3 \times 2x}{x^4}$$

$$= 3x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$

이다.

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3x}} \times 3$$

$$= 6x^5 + \frac{3}{\sqrt{3x}}$$

$$(6) \quad y = x^{\frac{2}{3}} + (3x)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} (3x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{6x\sqrt{3x}}$$

[예제2.5-5 : 합성함수의 미분법 응용] 합성함수의 미분법으로 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$(1) \quad y = (3t + 2)^3 \qquad (2) \quad y = (t^2 - 2t + 2)^2 (t + 2)$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \qquad (4) \quad y = \sqrt{2x + 1}$$

$$(5) \quad y = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 4} \qquad (6) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 6}} \qquad (8) \quad y = \sqrt{\sqrt{x} + 2}$$

[풀이] 합성함수의 미분공식에 의하여,

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = 3(3t + 2)^2 \times 3 = 9(3t + 2)^2$$

$$(2) \quad y = 2(t^2 - 2t + 2)(2t - 2)(t + 2) + (t^2 - 2t + 2)^2 \times 1 \\ = (t^2 - 2t + 2)\{2(2t^2 + 2t - 4) + t^2 - 2t + 2\}$$

$$= (t^2 - 2t + 2)(5t^2 + 2t - 6)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \times 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3x^2+3x+4}} \times (6x+3)$$

$$= \frac{6x+3}{\sqrt{3x^2+3x+4}}$$

$$(6) \quad y = \sqrt[3]{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \times 2x$$

$$= \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+6}} \times 4x$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+6}}$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+2}} \times (\sqrt{x}+2)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+2}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+2}}$$

[예제 2.5-6 : 매개함수의 도함수] 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = r \sin \omega t \\ y = r \cos \omega t \end{cases}$$

[풀이]

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ 이고, } \frac{dy}{dt} = 2t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t}{2} \\
&= t \\
&= \frac{x-3}{2}
\end{aligned}$$

이다.

(2) $\frac{dx}{dt} = r\omega \cos \omega t$ 이고, $\frac{dy}{dt} = -r\omega \sin \omega t$ 이므로

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{-r\omega \sin \omega t}{r\omega \cos \omega t} \\
&= -\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

이다.

[예제 2.5-7 : 음함수의 도함수] 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(1) $x^2 + y^2 = r^2$ (2) $x^2 - 3xy + y^2 = 12$

[풀이]

(1) y 를 x 의 함수로 보고 합성함수의 미분법에 따르면 $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ 이다.

따라서, $y \neq 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 이다.

(2) y 를 x 의 함수로 보고 합성함수의 미분법에 따르면

$$2x - 3y - 3x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

이다. 따라서, $3x - 2y \neq 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}$ 이다.

[예제 2.5-8 : 삼각함수의 도함수] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

(1) $y(t) = 15 \sin(3t + \frac{\pi}{3})$ (2) $y(t) = 20 \cos(10\pi t - \frac{\pi}{6})$

(3) $y(t) = (2 + t \sin t)^2$ (4) $y(t) = \sqrt{\sin t + 1}$

[풀이] 미분공식에 의하여,

(1) $\frac{dy}{dt} = 15 \cos(3t + \frac{\pi}{3}) \times 3$

$$= 45 \cos(3t + \frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{dy}{dt} &= -20 \sin(10\pi t - \frac{\pi}{6}) \times 10\pi \\ &= -200\pi \sin(10\pi t - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{dy}{dt} &= 2(2 + t \sin t) \times (t \sin t)' \\ &= 2(2 + t \sin t)(t \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{\sin t + 1}} \times (\sin t + 1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin t + 1}} \times (\cos t) \\ &= \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t + 1}} \end{aligned}$$

[예제 2.5-9 : 지수함수의 도함수] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$\begin{aligned} (1) \quad y(t) &= 5e^{-2t} + 2e^{4t} & (2) \quad y(t) &= 4 \cdot 3^{-2t} - 3^{2t} \\ (3) \quad y(t) &= 2e^{-4t} \sin 10t & (4) \quad y(t) &= e^{-2t} \cos(10t - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

[풀이]

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dy}{dt} &= 5e^{-2t} \times (-2) + 2e^{4t} \times 4 \\ &= -10e^{-2t} + 8e^{4t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{dy}{dt} &= 4 \cdot 3^{-2t} \cdot \ln 3 \cdot (-2) - 3^{2t} \cdot \ln 3 \cdot 2 \\ &= -8 \times 3^{-2t} \ln 3 - 2 \times 3^{2t} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{dy}{dt} &= -8e^{-4t} \sin 10t + 2e^{-4t} \cos 10t \times 10 \\ &= -4e^{-4t}(2 \sin 10t - 5 \cos 10t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{dy}{dt} &= -2e^{-2t} \cos(10t - \frac{\pi}{6}) + e^{-2t}(-\sin(10t - \frac{\pi}{6})) \times 10 \\ &= -2e^{-2t} \{ \cos(10t - \frac{\pi}{6}) + 5 \sin(10t - \frac{\pi}{6}) \} \end{aligned}$$

[예제 2.5-10 : 도함수의 이해] 다음의 함수에 대하여 물음에 답하여라.

$$y = 2x^2 + 4t - 2 \sin 3t$$

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} \text{를 구하여라.}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} \text{를 구하여라.}$$

[풀이]

(1) t 는 상수로 취급하므로

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

이다.

(2) x 는 상수로 취급하므로

$$\frac{dy}{dt} = 4 - 6\cos t$$

이다.

참고로 델타함수와 계단함수의 미분에 대하여 생각해보자. 그림2.4-4의 델타함수의 미분은 정의되지 않는다. 마찬가지로 그림 2.4-1의 계단함수의 미분도 엄밀한 의미에서는 정의되지 않는다. 그러나 공학에서는 시변수 t 는 한 쪽 방향으로만 흐르고 $t \geq 0$ 의 범위에서 관심이 있으므로 식(2.4-1a)의 단위계단함수와 식(2.4-1b)의 계단함수의 미분을 식(2.4-4)의 델타함수로 정의하여 사용한다. 따라서, 그림2.5-6의 위의 그림과 같은 함수 $v(t)$ 를 식으로 나타내면 다음의 식(2.5-17)과 같고,

$$v(t) = 5u_s(t) - 5u_s(t-4) \quad (2.5-17)$$

이 함수의 미분 $\frac{dv}{dt}$ 는 다음의 식(2.5-18)과 같고 그래프는 그림2.5-6의 밑의 그림과 같다.

$$\frac{dv}{dt} = 5\delta(t) - 5\delta(t-4) \quad (2.5-18)$$

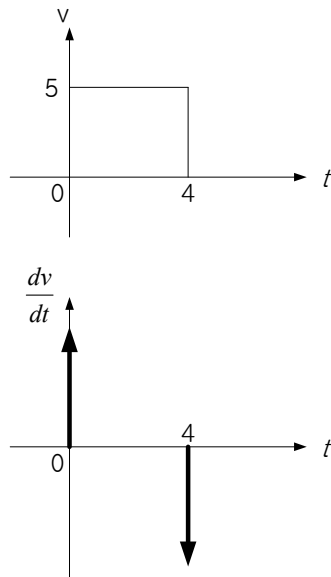


그림 2.5-6 계단함수의 미분

2.5.5 고차 도함수

함수 $y = f(x)$ 의 도함수 $y' = f'(x)$ 가 미분가능일 때, $f'(x)$ 의 도함수를 $f(x)$ 의 제2차도함수 (derivative of second order)라 하고 기호로는

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

등으로 나타낸다. 여기서 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$ 이고 $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)$ 이다. 또 $f''(x)$ 가 미분 가능하면, $f''(x)$ 의 도함수를 $f(x)$ 의 제3차도함수(derivative of third order)라 하고 기호

$$y''', f'''(x), \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3} f(x)$$

등으로 나타낸다. 이와 같이 하면, 일반적으로 $f(x)$ 의 제 n 차도함수(n -th derivative)를 정의할 수 있고 기호로는

$$y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

등으로 나타낸다.

2차이상의 도함수를 고차도함수라 하고 고차도함수에 대하여 $f'(x)$ 를 제1차도함수(first derivative)라 한다.

[예제2.5-11 : 고차도함수] 다음 함수들의 도함수, 제2차도함수, 제3차도함수를 구하여라.

$$(1) y = 2x^2 + 4 \quad (2) y = 2 + e^{-2x}$$

[풀이]

$$(1) y' = 4x, \quad y'' = 4, \quad y''' = 0$$

$$(2) y' = -2e^{-2x}, \quad y'' = 4e^{-2x}, \quad y''' = -8e^{-2x}$$

[예제2.5-12 : 고차도함수] 다음 함수들의 제 n 차도함수를 구하여라.

$$(1) y = e^{ax} \quad (2) y = x^n \quad (3) y = V_m \sin x$$

[풀이]

$$(1) y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2 e^{ax}, \quad y''' = a^3 e^{ax},$$

...

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$(2) y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

...

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}x^{n-n} \\ = n!$$

$$(3) y' = V_m \cos x = V_m \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y'' = -V_m \sin x = V_m \sin(x + \pi) = V_m \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = -V_m \cos x = V_m \sin \left(x + 3 \frac{\pi}{2} \right),$$

...

$$y^{(n)} = V_m \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

2.5.6 도함수의 응용

도함수를 이용하여 곡선의 접선, 속도와 가속도, 함수의 극대와 극소를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

2.5.6.1 곡선의 접선

그림 2-5-7에서, 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 $P(a, f(a))$ 에 접하는 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이므로, 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (2.51-19)$$

이다.

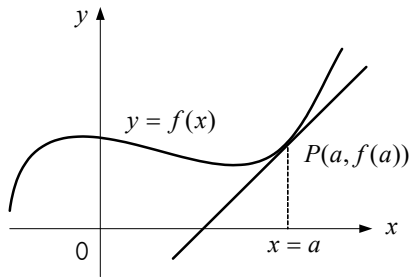


그림 2-5-7 곡선의 접선

[예제2.5-12 : 접선의 방정식] 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

$$(1) y = -x^2 + 4 \quad (2, 0) \quad (2) x^2 + y^2 = 4 \quad (1, \sqrt{3})$$

[풀이]

(1) 그림 2-5-8에서, 점 $(2, 0)$ 에 접하는 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = -2x \Big|_{x=2} = -4$$

이고, 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 0 = -4(x - 2),$$

즉, $y = -4x + 8$ 이다.

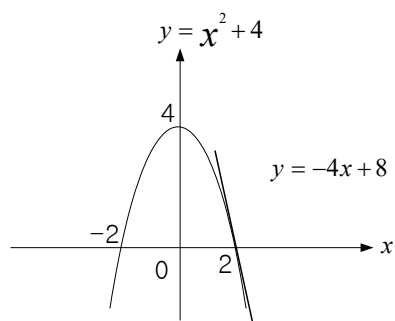


그림 2.5-8 접선의 방정식

(2) $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 로 미분하면 $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 이다.

그림 2.5-9에서, 점 $(1, \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 기울기는

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x, y) = (1, \sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이고, 점 $(1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1),$$

즉, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

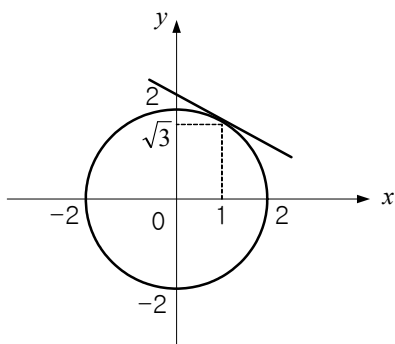


그림 2.5-9 접선의 방정식

2.5.6.2 속도와 가속도

(A) 직선운동

직선운동은 1차원 위에서의 운동으로서 x 축 또는 y 축 방향의 운동을 말한다. 시각 t 에서 수직 선(편의상 x 축) 위를 움직이는 질점 P 의 위치를 나타내는 좌표가

$$x(t) = f(t)$$

라고 하자. 질점이 Δt 시간 동안에 점 P 에서 점 Q 로 이동하였을 때, 변위 Δx 는

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

이고, $f(t)$ 의 $[t, t + \Delta t]$ 에서의 평균변화율

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

를 이 질점의 $[t, t+\Delta t]$ 에서의 **평균속도**라고 하며, 점 P 에서의 순간변화율을 이 질점의 시각 t 에서의 **속도(velocity)**라고 하며 속도를 $v(t)$ 로 나타내면

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f'(t)$$

이다. 즉, 속도는 이동거리의 시간에 대한 변화율이다. 또한 속도의 시간에 대한 변화율을 이 질점의 시각 t 에서의 **가속도(acceleration)**라고 하며 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

이다.

(B) 평면운동

그림 2.5-10에서, 시각 t 에서 평면 위를 움직이는 질점 P 의 위치를 나타내는 좌표 (x, y) 가

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

로 주어 질 때, $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f'(t)$ 와 $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g'(t)$ 를 성분으로 갖는 벡터

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y})$$

를 이 질점의 시각 t 에서의 **속도**라 하고, v_x 를 x 축 방향의 성분속도, v_y 를 y 축 방향의 성분속도라 한다. 이 때 속도 $\vec{v}$ 의 크기

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

를 이 질점의 시각 t 에서의 **속력**이라고 하며, 속도 $\vec{v}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

이다. 단, $\frac{dx}{dt} \neq 0$ 이다. 따라서, 속도 $\vec{v}$ 의 방향은 점 P 에 접하는 접선의 방향과 같다.

또한 $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}$ 와 $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}$ 를 성분으로 갖는 벡터

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = (\ddot{x}, \ddot{y})$$

를 이 질점의 시각 t 에서의 **가속도**라 하고, a_x 를 x 축 방향의 가속도성분, a_y 를 y 축 방향의 가속도성분이라 한다.

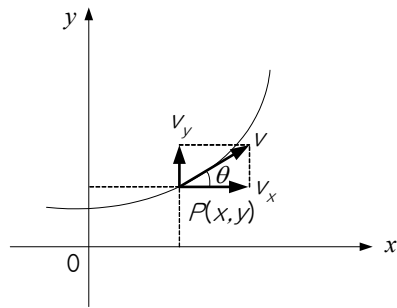


그림 2.5-10 평면에서의 운동

[예2.5-13 : 속도와 가속도] 반지름이 r 인 원주 위를 각속도 ω 로 운동하는 질점 P 의 속도와 가속도를 구하여라. 또한 속력과 가속도의 크기를 구하여라.

[풀이] 그림 2.5-11과 같이, 원의 중심을 원점으로 하고, $t=0$ 일 때 질점 P 의 위치를 $(r, 0)$, 시각 t 에서 P 의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t$$

이다. 따라서,

$$v_x = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = r\omega \cos \omega t$$

이므로 선속도 $\vec{v}(t)$ 는

$$\vec{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

이다. 또한

$$a_x = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = -r\omega^2 \sin \omega t$$

이므로 선가속도 $\vec{a}(t)$ 는

$$\vec{a}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

이다.

또한 속력 $|v(t)|$ 은

$$|v(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$$

이고, 가속도의 크기 $|a(t)|$ 는

$$|a(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

이다.

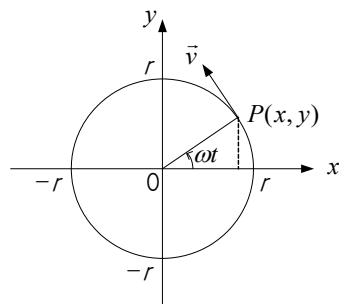


그림 2.5-11 원운동하는 물체의 선속도와 선가속도

2.5.6.3 함수의 증감과 극대·극소

(1) 증가함수와 감소함수

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 정의되고, 그 구간의 임의의 두 점 x_1, x_2 에 대하여

(i) $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면, $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다 또는

$f(x)$ 를 증가함수라 하고,

(ii) $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면, $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다 또는

$f(x)$ 를 감소함수라 한다.

예를 들어, 함수 $f(x) = x^2$ 은 $x \leq 0$ 인 구간에서 감소하고, $0 \leq x$ 인 구간에서 증가한다. 다음의 사실을 이용하여 함수의 증가·감소를 판단할 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 구간 (a, b) 에서 미분가능일 때, (a, b) 의 모든 x 에 대하여

(i) $f'(x) > 0$ 이면, $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 단조증가이고,

(ii) $f'(x) < 0$ 이면, $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 단조감소이고,

(iii) $f'(x) = 0$ 이면, $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 상수로 일정하다.

(2) 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$ 가 정의된 구간 내의 한점 $x = a$ 를 경계로 하여 증가상태에서 감소상태로 변하면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대(maximal)가 된다고 하며 $f(a)$ 를 극대값(maximal value)이라 한다. 그림 2.5-12에서 $f(x)$ 는 $x = a$ 와 $x = c$ 에서 극대이고, 극대값은 각각 $f(a)$ 와 $f(c)$ 이다. 마찬가지로 함수 $f(x)$ 가 정의된 구간 내의 한점 $x = a$ 를 경계로 하여 감소상태에서 증가상태로 변하면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소(minimal)가 된다고 하며 $f(a)$ 를 극소값(minimal value)이라 한다. 그림 2.5-12에서 $f(x)$ 는 $x = b$ 와 $x = d$ 에서 극소이고, 극소값은 각각 $f(b)$ 와 $f(d)$ 이다. 극대값과 극소값을 통틀어 극값(extreme value)이라 하고, 극대가 되는 점을 극대점, 극소가 되는 점을 극소점이라 한다.

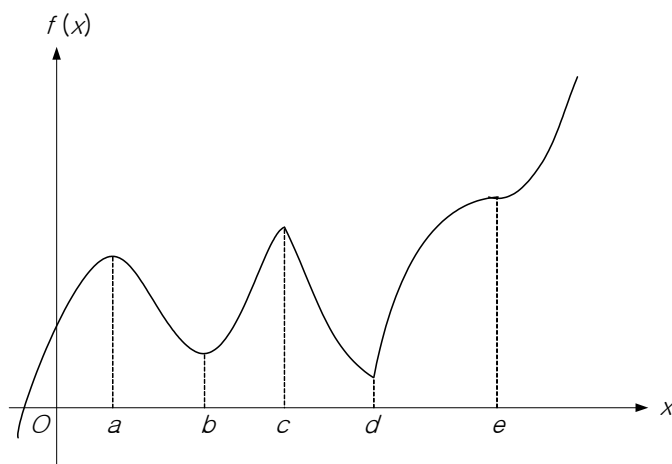


그림 2.5-12 극대와 극소

그림 2.5-12에서, $x = a$, $x = b$, $x = e$ 에서는 미분가능하고, $x = c$ 와 $x = d$ 에서는 미분불가능하

다. 미분가능한 극점들에서 다음 사실이 성립함을 알 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 의 근방에서 미분가능하고 $f(a)$ 가 극값이면 $f'(a) = 0$ 이다.

$f'(a) = 0$ 은 $f(a)$ 가 극값이 될 필요조건이지 충분조건은 아니다. 그림 2.5-12의 점 $(e, f(e))$ 와 같이, $f'(a) = 0$ 일 때에도 $f(a)$ 가 극값이 아닌 경우가 있다. 또한 그림 2.5-12의 점 $(c, f(c))$ 와 점 $(d, f(d))$ 와 같이, $f'(a)$ 가 존재하지 않더라도 $f(a)$ 가 극값이 되는 경우가 있다.

다음은 $f'(x)$ 에 의한 극대점과 극소점의 판정기준이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 의 근방에서 미분가능하고 $f'(a) = 0$ 일 때, $f'(x)$ 의 부호가 $x=a$ 를 경계로 하여

- (i) $+$ 에서 $-$ 로 변하면 점 $(a, f(a))$ 는 극대점이고,
- (ii) $-$ 에서 $+$ 로 변하면 점 $(a, f(a))$ 는 극소점이다.

다음은 $f''(x)$ 에 의한 극대·극소의 판정기준이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 의 근방에서 연속인 $f''(x)$ 를 가지고 $f'(a) = 0$ 일 때,

- (i) $f''(a) < 0$ 이면 $f(a)$ 는 극대값이고,
- (ii) $f''(a) > 0$ 이면 $f(a)$ 는 극소값이다.

[예2.5-14 : 극대값과 극소값] 다음 함수들의 극값을 구하고, 그 그래프를 그려라.

$$(1) f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad (2) f(x) = 2xe^{-x}, \quad x \geq 0$$

[풀이]

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6 \text{ 이다.}$$

$f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $x=0$, $x=2$ 이다.

$f''(0) = -6 < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극대값은 $f(0) = 1$ 이다.

$f''(2) = 6 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극소값은 $f(2) = -3$ 이다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 의 그래프는 그림 2.5-13과 같다.

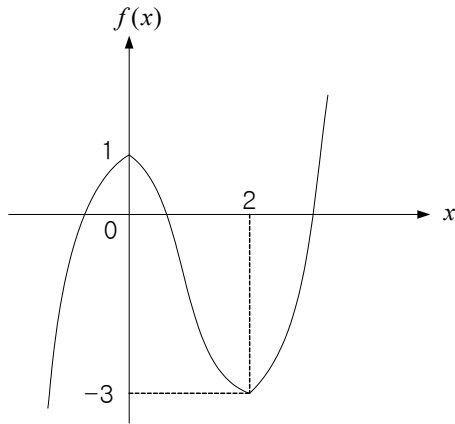


그림 2.5-13 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 의 그래프

- (2) $f'(x) = 2\{e^{-x} + x(-1)e^{-x}\} = 2(1-x)e^{-x}$,
 $f''(x) = 2\{(-1)e^{-x} + (1-x)(-1)e^{-x}\} = 2(-2+x)e^{-x}$ 이다.
 $f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $x=1$ 이다.
 $f''(1) = -2e^{-1} < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = 2e^{-1}$
 이다. $f(x) = 2xe^{-x}$ 의 극소값은 존재하지 않는다.
 $x \geq 0$ 에서 $f(x) = 2xe^{-x}$ 의 그래프는 그림 2.5-14와 같다.

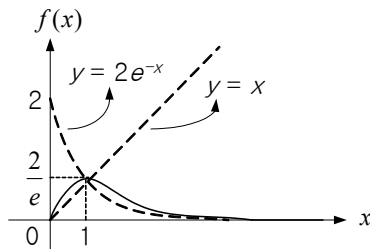


그림 2.5-14 $f(x) = 2xe^{-x}$ 의 그래프

[예2.5-15 : 극대 · 극소의 응용] 두께가 0.2mm 이고 넓이가 S_0 인 알루미늄 판으로 그림 2.5-15 같은 원통형의 음료수통을 만들려고 한다. 부피를 최대로 하기 위한 r 와 l 을 구하여라. 이 때 $\frac{l}{r}$ 은 얼마인가? 단, 알루미늄 판의 두께는 무시하고 계산하여라.

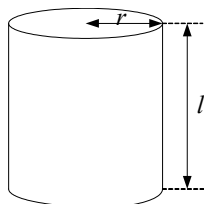


그림 2.5-15

[풀이] 음료수통의 부피 V 는

$$V = \pi r^2 l \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

이고, 주어진 면적 면적 S_0 는

$$S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r l \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

이다. 식②로부터

$$l = \frac{S_0 - 2\pi r^2}{2\pi r} \quad \text{-----} \quad \textcircled{3}$$

이다. 식③을 식①에 대입하면

$$V = \frac{r}{2} S_0 - \pi r^3 \quad \text{-----} \quad \textcircled{4}$$

이다. 식④로부터,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S_0}{2} - 3\pi r^2 \quad \text{-----} \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r \quad \text{-----} \quad \textcircled{6}$$

이다. $\frac{dV}{dr} = 0$ 으로 하는 r 은

$$r = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}} \quad \text{-----} \quad \textcircled{7}$$

이고, $\frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r=\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}} < 0$ 이므로 식⑦의 r 은 부피를 최대로 하는 값이다.

식⑦을 식②에 대입하고 정리하면

$$l = \sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}} \quad \text{-----} \quad \textcircled{8}$$

이다.

식⑦과 식⑧로부터,

$$\frac{l}{r} = 2 \quad \text{-----} \quad \textcircled{9}$$

이다.

2.6 적분

2.6.1 부정적분

함수 $f(x)$ 가 주어졌을 때, $F'(x) = f(x)$ 인 함수 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 부정적분 또는 원시함수라고 한다. $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 원시함수일 때 $F(x) + C$ 도 $f(x)$ 의 원시함수이며, 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2.6-1)$$

여기서, C 는 임의의 상수이며 C 를 적분상수라 하고, $f(x)$ 를 피적분함수, x 를 적분변수라 한다.

주어진 함수 $f(x)$ 의 원시함수 $F(x)$ 를 구하는 것을 $f(x)$ 를 적분한다고 하며, 그 산법을 적분법이라고 한다. 아래의 식에서 적분법은 미분법의 역산임을 알 수 있다.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C \quad (2.6-2)$$

[예제2.6-1 부정적분] 다음은 여러 가지 함수들의 부정적분이다.

$$(1) \int k dx = kx + C, \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$(4) \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$(5) \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$\int x\sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

$$(7) \int e^x dx = e^x + C, \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$(8) \int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C$$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 원시함수를 가지고 a 가 상수일 때, 다음의 식들이 성립한다.

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (2.6-3)$$

$$\int \{ f(x) \pm g(x) \} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (2.6-4)$$

[예제2.6-2 부정적분] 다음은 부정적분의 예들이다.

$$(1) \int (1+2x-6x^5) dx = (x+C_1) + 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) - 6\left(\frac{x^6}{6} + C_3\right) = x + x^2 - x^6 + C$$

$$(2) \int \left(4x - \frac{2}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 4 \times \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$(3) \int (2 \sin x + 3 \cos x) dx = -2 \cos x + 3 \sin x + C$$

$$(4) \int (2e^x - 3) dx = 2e^x - 3x + C$$

$f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 주어져 있을 때, 함수 $f(x)$ 는 식(2.6-1)에 의하여

$$f(x) = \int f'(x) dx + C \quad (2.6-5)$$

이다. 또한

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad (2.6-6)$$

이다.

[예제2.6-3 초기조건이 있는 부정적분] $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 와 $f(x)$ 의 초기조건이 주어져 있을 때, 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$(1) f'(x) = 1 \text{ 이고 } f(0) = 4 \quad (2) f'(x) = 3x^2 - 2 \text{ 이고 } f(0) = -2$$

[풀이]

$$(1) f(x) = \int 1 dx = x + C \text{ 이고 } f(0) = 4 \text{ 이므로 } 0 + C = 4 \text{ 에서 } C = 4 \text{ 이다.}$$

따라서, $f(x) = x + 4$ 이다.

$$(2) f(x) = \int (3x^2 - 2) dx = x^3 - 2x + C \text{ 이고 } f(0) = -2 \text{ 이므로 } 0 - 0 + C = -2 \text{ 에}$$

서 $C = -2$ 이다. 따라서, $f(x) = x^3 - 2x - 2$ 이다.

[예제2.6-4] $\frac{d}{dx} \int (ax^2 + bx + c) dx = 6x^2 - 2x + 4$ 를 만족시키는 상수 a, b, c 를 구하여라.

[풀이] $\frac{d}{dx} \int (ax^2 + bx + c) dx = ax^2 + bx + c$ 이므로 $a = 6, b = -2, c = 4$ 이다.

2.6.2 치환적분

$$\int f\{g(x)\} g'(x) dx$$

를 구하기 위하여, $g(x) = u$ 로 치환하면 $\frac{du}{dx} = g'(x)$ 이고, $g'(x) dx = du$ 이므로

$$\begin{aligned} \int f\{g(x)\} g'(x) dx &= \int f(u) du \\ &= F(u) + C \\ &= F\{g(x)\} + C \end{aligned} \quad (2.6-7)$$

이다.

이 적분공식을 이용하는 적분법을 치환적분법이라고 한다. 예를 들어, $\int (2x+1)^5 dx$ 를 구해보자.

$2x+1 = u$ 로 놓으면, $2dx = du$ 이므로

$$\begin{aligned} \int (2x+1)^5 dx &= \int u^5 \frac{1}{2} du \\ &= \frac{u^6}{6} \times \frac{1}{2} + C \\ &= \frac{1}{12} (2x+1)^6 + C \end{aligned}$$

이다.

다음의 식들은 치환적분과 관련된 유용한 공식들이다.

- ① $\int f(x) dx = F(x) + C$ 이면, $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a \neq 0$)이다.
- ② $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$ ($n \neq -1$)
- ③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

[예제2.6-5 치환적분법] 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구하여라.

- (1) $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$ (2) $\int \sqrt{2x-3} dx$ (3) $\int e^{2x+1} dx$
- (4) $\int \sin(4x + \frac{\pi}{3}) dx$ (5) $\int \cos(4x - \frac{\pi}{3}) dx$ (6) $\int \cos^2 x dx$

[풀이]

(1) $2x+3 = u$ 로 놓으면 $2dx = du$ 이다. 따라서,

$$\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x+3} + C$$

이다.

(2) $2x-3=u$ 로 놓으면 $2dx=du$ 이다. 따라서,

$$\int \sqrt{2x-3} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

이다.

(3) $2x+1=u$ 로 놓으면 $2dx=du$ 이다. 따라서,

$$\int e^{2x+1} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

이다.

(4) $4x+\frac{\pi}{3}=u$ 로 놓으면 $4dx=du$ 이다. 따라서,

$$\int \sin(4x+\frac{\pi}{3}) dx = \int \sin u \frac{du}{4} = -\frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} \cos(4x+\frac{\pi}{3}) + C$$

이다.

(5) $4x-\frac{\pi}{3}=u$ 로 놓으면 $4dx=du$ 이다. 따라서,

$$\int \cos(4x-\frac{\pi}{3}) dx = \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin(4x-\frac{\pi}{3}) + C$$

이다.

(6) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 이므로

$$\int \cos^2 x = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

이다.

2.6.3 부분적분

두 함수 $u(x)$ 와 $v(x)$ 가 미분가능하면 $\frac{duv}{dx}$ 는

$$\frac{duv}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

이므로

$$\int u'v dx = uv - \int u v' dx \quad (2.6-8)$$

이다. 이 공식을 이용하는 적분법을 부분적분법이라고 한다.

예를들어, $\int x e^x dx$ 를 구해보자. $u' = e^x$, $v = x$ 라 놓으면 $u = e^x$, $v' = 1$ 이므로

$$\int x e^x dx = e^x x - \int e^x 1 dx = x e^x - e^x + C$$

이다.

[예제2.6-6 부분적분법] 부분적분법으로 다음의 부정적분을 구하여라.

$$(1) \int x \cos x dx \quad (2) \int x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx \quad (3) \int x e^{-2x} dx$$

[풀이]

(1) $u' = \cos x$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \sin x$, $v' = 1$ 이므로

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx = x \sin x + \cos x + C$$

이다.

(2) $u' = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $v = x$ 라 놓으면 $u = -\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{6})$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx &= -x \cos(2x + \frac{\pi}{6}) - \int (-\frac{1}{2}) \cos(2x + \frac{\pi}{6}) \cdot 1 dx \\ &= -x \cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{6})}{2} + C \\ &= -x \cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + C \end{aligned}$$

이다.

(3) $u' = e^{-2x}$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \frac{e^{-2x}}{-2}$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \end{aligned}$$

이다.

2.6.4 정적분

그림 2.6-1과 같이, 함수 $y = f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x, \quad \text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

가 존재하면, 이 값을 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 정적분이라 하고 $\int_a^b f(x) dx$ 로 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \quad (2.6-9)$$

이다. 또한 $\int_a^b f(x) dx$ 가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 적분가능이라고 하며, $f(x)$ 를 피적분함수, a 를 정적분의 하한, b 를 정적분의 상한이라 한다.

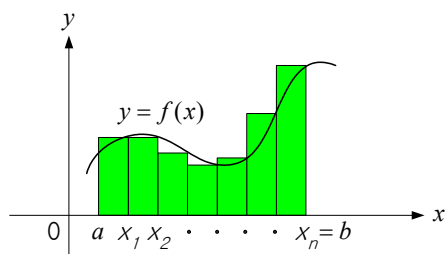


그림 2.6-1 정적분의 정의

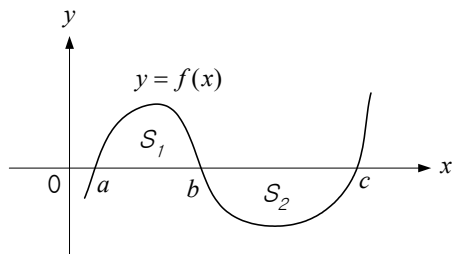


그림 2.6-2 넓이와 정적분

그림 2.6-2에서, 넓이와 정적분 사이의 관계는

$$\int_a^b f(x) dx = S_1,$$

$$\int_b^c f(x) dx = -S_2,$$

$$\int_a^c f(x) dx = S_1 - S_2$$

임에 주의하기 바란다.

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 적분가능하고 다음의 성질들이 성립한다.

$$\textcircled{1} \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2.6-10)$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (2.6-11)$$

$$\textcircled{3} \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad (k \text{는 상수}) \quad (2.6-12)$$

$$\textcircled{4} \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (2.6-13)$$

$$\textcircled{5} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \quad (a < b < c) \quad (2.6-14)$$

$$\textcircled{6} \text{ 함수 } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ 는 구간 } (a, b) \text{에서 미분가능하고,}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (2.6-15)$$

이다.

⑦ 정적분과 부분적분 사이의 관계는 다음과 같다. $f(x)$ 의 원시함수 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2.6-16)$$

이다. $F(a) - F(b)$ 를 기호로는 $[F(x)]_a^b$ 로 나타낸다.

[예 제2.6-7 정적분] 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_{-1}^{+1} (6x^2 + 2) dx \quad (2) \int_0^1 (3\sqrt{x} + 2) dx \quad (3) \int_0^1 (4e^{-2x} + 2x) dx$$

$$(4) \int_0^{2\pi} \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \quad (5) \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \quad (6) \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx$$

[풀이]

$$(1) \int_{-1}^{+1} (6x^2 + 2) dx = [2x^3 + 2x]_{-1}^{+1} = 4 - (-4) = 8$$

$$(2) \int_0^1 (3\sqrt{x} + 2) dx = [2x^{\frac{3}{2}} + 2x]_0^1 = 4 - 0 = 4$$

$$(3) \int_0^1 (4e^{-2x} + 2x) dx = [-2e^{-2x} + x^2]_0^1 = (-2e^{-2} + 1) - (-2) = 3 - 2e^{-2}$$

$$(4) \int_0^{2\pi} \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} + [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -(1-1) - (-1-1)$$

$$= 2$$

$$(5) \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} [x - \frac{\sin 2x}{2}]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \times (2\pi) = \pi$$

$$(6) \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\sin x \cos x) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin 2x) dx$$

$$= [x + \frac{\cos 2x}{-2}]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (\pi + \frac{1}{-2}) - (-\pi + \frac{1}{-2})$$

$$= 2\pi$$

[예 제2.6-8 정적분으로 정의된 함수의 미분] 다음 함수들을 x 에 관하여 미분하여라.

$$(1) y = \int_0^x (t^2 + 2t + 2) dt \quad (2) y = \int_1^x e^{-2t} \sin t dt$$

[풀이]

$$(1) \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = e^{-2x} \sin x$$

이제 치환적분법으로 정적분을 구해보자. $\int_a^b f(x) dx$ 에서 $x = \phi(t)$ 로 치환하면, $dx = \phi'(t) dt$ 이고,
 $x = a$ 에 대응하는 t 값을 $t = \alpha$, $x = b$ 에 대응하는 t 값을 $t = \beta$ 라고 하면,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

이다. 이러한 적분법을 **치환적분법**이라고 부른다.

예를 들어, $\int_0^1 (2x+1)^2 dx$ 는 2가지의 방법으로 구할 수 있다.

(첫번째 방법) $2x+1 = t$ 로 놓으면, $2dx = dt$ 이므로

$$\int (2x+1)^2 dx = \int t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{6} (2x+1)^3$$

이다. $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ 이므로

$$\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{6} (2x+1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} (27 - 1) = \frac{13}{6}$$

이다.

(두번째 방법) $2x+1 = t$ 로 놓으면, $2dx = dt$ 이고, x 의 적분구간이 $[0, 1]$ 일 때 t 의 적분구간은 $[1, 3]$ 이므로

$$\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \int_1^3 t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{6} (27 - 1) = \frac{13}{6}$$

이다.

[예제 2.6-9 치환적분법을 이용한 정적분] 치환적분법으로 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_0^2 (2x-1)^2 dx \quad (2) \int_0^2 \sqrt{4x+2} dx$$

[풀이]

(1) $2x-1 = t$ 로 놓으면, $2dx = dt$ 이고, x 의 적분구간이 $[0, 2]$ 일 때 t 의 적분구간은 $[-1, 3]$ 이므로

$$\int_0^2 (2x-1)^2 dx = \int_{-1}^3 t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^3 = \frac{1}{6} (27 + 1) = \frac{14}{3}$$

이다.

(2) $4x+2 = t$ 로 놓으면, $4dx = dt$ 이고, x 의 적분구간이 $[0, 2]$ 일 때 t 의 적분구간은 $[2, 10]$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4x+2} dx &= \int_2^{10} \sqrt{t} \frac{dt}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} + 1} \right]_2^{10} \\ &= \frac{1}{6} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{3} (5\sqrt{10} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

이다.

이제 부분적분법으로 정적분을 구해보자. $(uv)' = u'v + uv'$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b u'v dx &= \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b uv' dx \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx\end{aligned}$$

이다. 이러한 적분법을 **부분적분법**이라고 부른다.

[예제 2.6-10 부분적분을 이용한 정적분] 부분적분법으로 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_0^{\pi} x \cos x dx \qquad (2) \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

[풀이]

(1) $u' = \cos x$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \sin x$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \cdot 1 dx \\ &= (0 - 0) - [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

이다.

(2) $u' = e^{-2x}$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \frac{e^{-2x}}{-2}$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{-2x} dx &= \left[x \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{-2} \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-2} - 0) + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - e^0) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}\end{aligned}$$

이다.

2.7 미분방정식

다음의 식들과 같이, 어떤 변수와 그 함수 및 도함수를 포함하는 방정식을 미분방정식이라고 부른다. 미분방정식이 변수와 도함수의 다항식으로 표시될 때, 최고계 도함수의 차수를 미분방정식의 차수라고 한다.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 0 \quad \text{-----} \quad ①$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = e^{-t} \quad \text{-----} \quad ②$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad \text{-----} \quad ③$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \quad \text{-----} \quad ④$$

아주 많은 종류의 미분방정식이 있으나, 여기서는 회로이론을 배우는데 필요한 다음과 같은 형태의 **선형미분방정식**에 한하여 알아보자. 식⑤와 같은 형태의 방정식을 선형 1차미분방정식이라 부르고, 식⑥과 같은 형태의 방정식을 선형 2차미분방정식이라 부른다.

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = b x(t) \quad \text{-----} \quad ⑤$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + b y(t) = c x(t) \quad \text{-----} \quad ⑥$$

위의 식①과 식②는 선형 1차미분방정식의 예이고, 식③과 식④는 선형 2차미분방정식의 예이다. 미분방정식의 선형성은 교과서 5.1절과 7.4.1절에 기술되었다.

그림 2.7-1에서와 같이, 입력신호를 $x(t)$, 출력신호를 $y(t)$ 라고 하면, 에너지 저장소자가 포함된 회로에서 입력 신호 $x(t)$ 와 출력신호를 $y(t)$ 사이의 관계는 식⑤와 식⑥ 등의 미분방정식으로 기술된다.

식⑤와 식⑥에서, $x(t) = 0$ 이면 그 방정식을 제차(homogeneous)라고 말하고, $x \neq 0$ 이면 비제차(nonhomogeneous)라고 말한다.

미분방정식을 만족하는 함수를 미분방정식의 해라고 하고, 모든 해를 구하는 것을 미분방정식을 푼다고 한다. 구체적으로 제차 선형미분방정식과 비제차 선형미분방정식의 해를 구해보자.

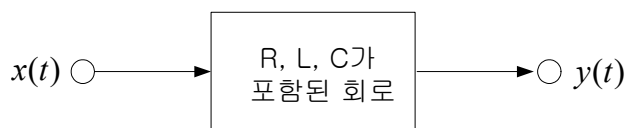


그림 2.7-1 회로에서의 입력신호와 출력신호

2.7.1 제차 선형미분방정식의 해

먼저 식(2.7-1)과 같은 제차 선형 1차미분방정식(homogeneous linear first-order differential equation)의 해를 구해보자. 식(2.7-1)에서 a 는 상수이다.

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = 0 \quad (2.7-1)$$

식(2.7-1)을 변형하면

$$\frac{dy(t)}{y(t)} + a dt = 0 \quad (2.7-2)$$

이고, 식(2.7-2)를 적분하면

$$\begin{aligned} \ln |y(t)| &= -a \int dt + c^* \\ &= -at + c^* \end{aligned} \quad (2.7-3)$$

이다. 즉,

$$y(t) = C e^{-at} \quad (2.7-4)$$

이다. 여기서, $C = e^{c^*}$ 이다. 식(2.7-4)의 해를 제차 미분방정식 식(2.7-1)의 **일반해**라고 한다.

초기치가 $y(0) = y_0$ 으로 주어질 때, 식(2.7-4)에 $t = 0$ 를 대입하면 C 는

$$y_0 = C$$

이므로, 식(2.7-2)의 해는

$$y(t) = y_0 e^{-at} \quad (2.7-5)$$

이다.

[예제2.7-1 제차 선형 1차미분방정식의 해] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

(1) $\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0$ 의 일반해를 구하여라.

(2) (1)의 미분방정식에서 초기치 $y(0)$ 가 $y(0) = 2$ 일 때의 해를 구하여라.

[풀이]

(1) $y'(t) + 4y(t) = 0$ 의 일반해는 식(2.7-4)에 의하여

$$y(t) = C e^{-4t}$$

이다.

(2) $y(0) = 2$ 일 때의 해는

$$2 = C$$

이므로 $y(t) = 2e^{-4t}$ 이다.

이제 식(2.7-6)과 같은 제차 선형 2차미분방정식(homogeneous linear second-order differential equation)의 해를 구해보자. 식(2.7-6)에서 a 와 b 는 상수이다.

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = 0 \quad (2.7-6)$$

앞에서 제차 선형 1차미분방정식

$$\frac{dy(t)}{y(t)} + a dt = 0$$

의 일반해는

$$y(t) = C e^{-at}$$

임을 알았다. 그러므로 적당한 λ 에 대하여

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad (2.7-7)$$

가 식(2.7-6)의 해가 될 수 있다고 생각할 수 있다. 식(2.7-7)의 $y(t)$ 와 그 도함수

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

를 식(2.7-6)에 대입하면,

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

이다. 따라서, λ 가

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.7-8)$$

를 만족하면 식(2.7-7)의 $y(t)$ 는 식(2.7-6)의 해가 된다. 식(2.7-8)을 미분방정식 식(2.7-6)의 특성방정식(characteristic equation)이라 부른다. 식(2.7-8)의 근은

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.7-9)$$

이므로

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t} \quad (2.7-10)$$

는 미분방정식 식(2.7-6)의 해의 하나이다. y_1 과 y_2 가 미분방정식 식(2.7-6)의 해의 하나이면, 미분방정식 식(2.7-6)의 일반해 $y(t)$ 는 다음과 같다.

① $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 이면 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (2.7-11)$$

이고,

② $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 이면 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad (2.7-12)$$

이다.

식(2.7-11)과 식(2.7-12)에서 C_1 과 C_2 는 초기치 $y(0)$ 와 $\frac{dy}{dt}(0)$ 로부터 구할 수 있다.

식(2.7-8)의 특성방정식은 a 와 b 의 값에 따라 2개의 서로 다른 실근, 2개의 켤레복소수 근, 이중근 중 하나의 근을 가질 수 있으며, 이 때의 일반해에 대하여 구체적으로 생각해 보자.

(a) 특성방정식이 2개의 서로 다른 실근을 가질 때의 일반해 : 특성방정식의 서로 다

른 2개의 실근을 각각 λ_1, λ_2 라고 하면, $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ 과 $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ 는

식(2.7-6)의 해 중 하나이며, 식(2.7-6)의 일반해 $y(t)$ 는 식(2.7-11)과 같은

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.7-13)$$

이다.

예를 들어, 미분방정식 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ 의 일반해를

구해보자. 특성방정식은 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 이므

로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 + C_2 = 0$$

$y'(0) = 2$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$-C_1 - 2C_2 = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $C_1 = 2$, $C_2 = -2$ 이므로 해는

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

이다.

(b) 특성방정식이 2개의 켤레복소수의 근을 가질 때의 일반해 : 특성방정식의 서로 다른 2개의 복소수 근을 각각

$$\lambda_1 = -p + jq, \lambda_2 = -p - jq$$

라고 하면, $y_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{(-p+jq)t}$ 와 $y_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{(-p-jq)t}$ 는

식(2.7-6)의 해 중 하나이다. 따라서 식(2.7-6)의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = C_1 e^{(-p+jq)t} + C_2 e^{(-p-jq)t} \quad (2.7-14)$$

이다.

식(2.7-14)의 일반해에는 복소수가 포함되어 어떤 함수인 지 알기 어려우므로, Euler의 공식을 이용하여 식(2.7-14)를 변형해 보자.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

이므로,

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-pt} (C_1 e^{+jq t} + C_2 e^{-jq t}) \\ &= e^{-pt} \{ (C_1 + C_2) \cos qt + j(C_1 - C_2) \sin qt \} \\ &= e^{-pt} (A \cos qt + B \sin qt) \end{aligned} \quad (2.7-15)$$

이다. 여기서, $A = C_1 + C_2$, $B = j(C_1 - C_2)$ 이다.

즉, 특성방정식이 서로 다른 2개의 복소수 근을 가지는 경우, 미분방정식 식(2.7-7)의 일반해는 식(2.7-14) 또는 식(2.7-15)의 형태이다.

예로서, 미분방정식 $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ 의 일반해를 식(2.7-15)를 사용하여 구해보자. 특성방정식은 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1 + j2$, $\lambda_2 = -1 - j2$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = e^{-t} (A \cos 2t + B \sin 2t)$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = e^{-t}\{(-A + 2B)\cos 2t + (-B - 2B)\sin 2t\}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터

$$A = 1$$

를 얻고, $y'(0) = 4$ 로부터

$$-A + 2B = 3$$

를 얻는다. 즉, $A = 1$, $B = 2$ 이다. 따라서, 해는

$$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

이다.

$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ 의 일반해를 식(2.7-14)의 형태로 표현

해 보자. 특성방정식은 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1 + j2$,

$\lambda_2 = -1 - j2$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = C_1 e^{(-1 + j2)t} + C_2 e^{(-1 - j2)t}$$

이다. 또한 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = (-1 + j2)C_1 e^{(-1 + j2)t} + (-1 - j2)C_2 e^{(-1 - j2)t}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터

$$C_1 + C_2 = 1$$

를 얻고, $y'(0) = 4$ 로부터

$$(-1 + j2)C_1 + (-1 - j2)C_2 = 3$$

를 얻는다. 위의 식들을 연립하여 풀면 $C_1 = \frac{1 - j2}{2}$, $C_2 = \frac{1 + j2}{2}$ 이다.

따라서, 해는

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1 - j2}{2} e^{(-1 + j2)t} + \frac{1 + j2}{2} e^{(-1 - j2)t} \\ &= e^{-t} \left\{ \frac{1 - j2}{2} e^{j2t} + \frac{1 + j2}{2} e^{-j2t} \right\} \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \{ (1 - j2)(\cos 2t + j\sin 2t) + (1 + j2)(\cos 2t - j\sin 2t) \} \\ &= e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t) \end{aligned}$$

이다.

식(2.7-14)의 일반해를 사용하면 식(2.7-15)의 일반해를 사용하는 것에 비하여 초기치가 주어질 때의 해를 구하는 계산과정이 복잡하나 결과는 동일하다.

(c) 특성방정식이 1개의 이중근을 가질 때의 일반해 : 특성방정식의 이중근을 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 라고 하면, 식(2.7-6)의 일반해 $y(t)$ 는 식(2.7-12)와 같은

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad (2.7-16)$$

이다.

예를 들어, 미분방정식 $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$ 의 일반해를 구해보자. 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-2t}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 = 1$$

$y'(0) = 2$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$C_2 - 2C_1 = 2$$

위의 식들로부터 $C_1 = 1$, $C_2 = 4$ 이므로 해는

$$y(t) = (1 + 4t)e^{-2t}$$

이다.

[예제2.7-2 제차 선형 2차미분방정식의 해] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

- (1) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해
- (2) $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ 일 때의 해
- (3) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해

[풀이]

(1) 특성방정식은 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 + C_2 = 1$$

$y'(0) = 2$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$-2C_1 - 3C_2 = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $C_2 = -4$, $C_1 = 5$ 이므로 해는

$$y(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

이다.

(2) 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2 + j3$, $\lambda_2 = -2 - j3$ 이므로 주어진 미분방

정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = e^{-2t}(A \cos 3t + B \sin 3t)$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = e^{-2t}\{(-2A + 3B)\cos 3t - (2B + 3A)\sin 3t\}$$

이다. $y(0) = 2$ 로부터

$$A = 2$$

를 얻고, $y'(0) = 5$ 로부터

$$-2A + 3B = 5$$

를 얻는다. 즉, $A = 2$, $B = 3$ 이다. 따라서, 해는

$$y(t) = e^{-2t}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t)$$

이다.

(3) 특성방정식은 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = (C_2 - 3C_1 - 3C_2 t)e^{-3t}$$

이다. $y(0) = 3$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 = 3$$

$y'(0) = 1$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$C_2 - 3C_1 = 1$$

위의 식들로부터 $C_1 = 3$, $C_2 = 10$ 이므로 해는

$$y(t) = (3 + 10t)e^{-3t}$$

이다.

2.7.2 비제차 선형미분방정식의 해

먼저 식(2.7-17)과 같은 비제차선형1차미분방정식(nonhomogeneous linear first-order differential equation)의 해를 구해보자. 식(2.7-17)에서 a 는 상수이다.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (2.7-17)$$

식(2.7-17)에 대응하는 제차 미분방정식은 $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0$ 이고, 제차미분방정식의

일반해를 $y_h(t)$ 라고 하면

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \quad (2.7-18)$$

이다.

또한 비제차 미분방정식 식(2.7-17)의 특수해를 $y_p(t)$ 라고 하면

$$\frac{dy_p(t)}{dt} + a y_p(t) = x(t) \quad (2.7-19)$$

이다.

비제차 미분방정식 식(2.7-17)의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2.7-20)$$

이다. 이러한 사실을 알아보기 위해 식(2.7-20)을 식(2.7-17)에 대입한 후 정리하면,

$$(y_h' + a y_h) + (y_p' + a y_p) = x(t) \quad (2.7-21)$$

이다. y_h 는 식(2.7-18)의 해이므로 식(2.7-21)의 좌변의 첫 번째 항은 0이고, y_p 는 식(2.7-19)의 특수해이므로 식(2.7-19)를 만족한다. 그러므로 식(2.7-20)의 $y(t)$ 는 식(2.7-17)의 일반해이다. 즉,

비제차선형미분방정식 식(2.7-17)의 일반해 $y(t)$ 는 이에 대응하는 제차방정식 식(2.7-18)의 일반해 $y_h(t)$ 와 식(2.7-19)의 특수해 $y_p(t)$ 와의 합과 같다.
즉, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ 이다.

여기서, 제차미분방정식 식(2.7-18)의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = C e^{-at}$ 이고, 식(2.7-19)의 특수해 $y_p(t)$ 는 다음과 같이 구한다.

- ① 만일 $x(t)$ 가 표2.7-1의 제1열에 있는 함수 중의 하나이면, $y_p(t)$ 는 제2열에 있는 함수로 택하고, y_p 를 식(2.7-19)에 대입하여 계수들을 결정한다.
- ② 만일 $x(t)$ 가 표2.7-1의 제1열에 있는 함수들의 합으로 되어 있다면, $y_p(t)$ 는 이들에 대응하는 행에 있는 함수들의 합으로 택하고, y_p 를 식(2.7-19)에 대입하여 계수들을 결정한다.
- ③ 만일 $x(t)$ 의 한 항이 식(2.7-19)에 대응하는 제차미분방정식의 한 해이면, 다음의 수정법칙에 따라 y_p 의 선택을 수정하여야 한다.
수정법칙 : 제3열에 있는 수가 식(2.7-19)에 대응하는 특성방정식의 한 해이면 제2열의 그에 해당되는 행에 있는 식에 t 를 곱한 식을 $y_p(t)$ 로 선택한다.

표2.7-1 $x(t)$ 에 따른 특수해 $y_p(t)$ 의 선택

$x(t)$ 의 항	선택할 특수해 $y_p(t)$	
ke^{pt}	De^{pt}	p
$kt^n (n = 0, 1, \dots)$	$K_n t^n + K_{n-1} t^{n-1} + \dots + K_1 t + K_0$	0
$k \cos qt$	$K_1 \cos qt + K_2 \sin qt = K \cos (qt + \Theta)$	jq
$k \sin qt$	$K_1 \cos qt + K_2 \sin qt = K \sin (qt + \Theta)$	jq

[예제2.7-3 비제차선형1차미분방정식의 특수해] 다음 미분방정식의 특수해 $y_p(t)$ 를 구하여라.

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = e^{-t} + 4t \quad (2) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5 \cos t$$

$$(3) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4 + 5 \sin 2t \quad (4) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4t + 5e^{-2t}$$

[풀이]

(1) 주어진 미분방정식에 대응하는 제미분방정식 $\frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = Ce^{-2t}$$

이고, $x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = De^{-t} + K_1t + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -De^{-t} + K_1$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{dy_p(t)}{dt} + 2y_p(t) = e^{-t} + 4t \text{ 에 대입하면}$$

$$De^{-t} + 2K_1t + (K_1 + 2K_0) = e^{-t} + 4t$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$D = 1,$$

$$2K_1 = 4,$$

$$K_1 + 2K_0 = 0$$

이어야 하므로 $D = 1$, $K_1 = 2$, $K_0 = -1$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = e^{-t} + 2t - 1$$

이다.

(2) 주어진 미분방정식에 대응하는 제차미분방정식 $\frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = Ce^{-2t}$$

이고, $x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -K_1 \sin t + K_2 \cos t$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식 $\frac{dy_p(t)}{dt} + 2y_p(t) = 5 \cos t$ 에 대입하면

$$(2K_1 + K_2) \cos t + (-K_1 + 2K_2) \sin t = 5 \cos t$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$\begin{aligned} 2K_1 + K_2 &= 5, \\ -K_1 + 2K_2 &= 0 \end{aligned}$$

이어야 하므로 $K_2 = 1$, $K_1 = 2$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 2 \cos t + \sin t$$

이다.

(3) 주어진 미분방정식에 대응하는 제차미분방정식 $\frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = Ce^{-2t}$$

이고, $x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + K_1 \cos 2t + K_2 \sin 2t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2K_1 \sin 2t + 2K_2 \cos 2t$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{dy_p(t)}{dt} + 2y_p(t) = 4 + 5 \sin 2t \text{ 에 대입하면}$$

$$2K_0 + (2K_2 + 2K_1) \cos 2t + (-2K_1 + 2K_2) \sin 2t = 4 + 5 \sin 2t$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$\begin{aligned} 2K_0 &= 4, \\ 2K_1 + 2K_2 &= 0, \\ -2K_1 + 2K_2 &= 5 \end{aligned}$$

이어야 하므로 $K_0 = 2$, $K_2 = \frac{5}{4}$, $K_1 = -\frac{5}{4}$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 2 - \frac{5}{4} \cos 2t + \frac{5}{4} \sin 2t$$

이다.

(4) 주어진 미분방정식에 대응하는 제차미분방정식 $\frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = Ce^{-2t}$$

이고, $x(t)$ 의 두 번째 항인 $5e^{-2t}$ 는 제차미분방정식의 해이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1 t + K_0 + Dte^{-2t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = K_1 + De^{-2t} - 2Dte^{-2t}$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{dy_p(t)}{dt} + 2y_p(t) = 4t + 5e^{-2t} \text{에 대입하면}$$

$$(K_1 + 2K_0) + 2K_1t + De^{-2t} = 4t + 5e^{-2t}$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$K_1 + 2K_0 = 0,$$

$$2K_1 = 4,$$

$$D = 5$$

이어야 하므로 $K_1 = 2$, $K_0 = -1$, $D = 5$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 2t - 1 + 5te^{-2t}$$

이다.

[예제 2.7-4 비제차선형 1차 미분방정식의 일반해] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

(1) $y'(t) + 4y(t) = 6 + 2e^{-3t}$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 2$ 일 때의 해

(2) $y'(t) + 4y(t) = 2t + 2e^{-4t}$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 2$ 일 때의 해

[풀이]

(1) $y'(t) + 4y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-4t}$ 이고,

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + De^{-3t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -3De^{-3t}$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$4K_0 + De^{-3t} = 6 + 2e^{-3t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$K_0 = \frac{3}{2},$$

$$D = 2$$

이다. 따라서,

$$y_p(t) = \frac{3}{2} + 2e^{-3t}$$

이고, 일반해 $y(x)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-4t} + \frac{3}{2} + 2e^{-3t} \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 2$ 일 때,

$$C + \frac{3}{2} + 2 = 2$$

이므로 $C = -\frac{3}{2}$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 2$ 일 때의 해는

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{3}{2} + 2e^{-3t}$$

이다.

(2) $y'(t) + 4y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-4t}$ 이고,

$x(t)$ 의 두 번째 항인 $2e^{-4t}$ 는 제차미분방정식의 해이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1t + K_0 + Dte^{-4t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = K_1 + De^{-4t} - 4Dte^{-4t}$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$(K_1 + 4K_0) + 4K_1t + De^{-4t} = 2t + 2e^{-4t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$K_1 + 4K_0 = 0,$$

$$4K_1 = 2,$$

$$D = 2$$

이다. 즉, $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_0 = -\frac{1}{8}$, $D = 2$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} + 2te^{-4t}$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-4t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} + 2te^{-4t} \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 2$ 일 때,

$$C - \frac{1}{8} = 2$$

이므로 $C = \frac{17}{8}$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 2$ 일 때의 해는

$$y(t) = \frac{17}{8}e^{-4t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} + 2te^{-4t}$$

이다.

이제 식(2.7-22)와 같은 비제차선형2차미분방정식(nonhomogeneous linear first-order differential equation)의 해를 구해보자. 식(2.7-22)에서 a 와 b 는 상수이다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = x(t) \quad (2.7-22)$$

식(2.7-22)에 대응하는 제차미분방정식은 $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = 0$ 이고,

일반해를 $y_h(t)$ 라 하면

$$\frac{d^2y_h(t)}{dt^2} + a\frac{dy_h(t)}{dt} + by_h(t) = 0 \quad (2.7-23)$$

이다. 비제차 미분방정식 식(2.7-22)의 특수해를 $y_p(t)$ 라 하면,

$$\frac{d^2y_p(t)}{dt^2} + a\frac{dy_p(t)}{dt} + by_p(t) = x(t) \quad (2.7-24)$$

이며, 미분방정식 식(2.7-22)의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2.7-25)$$

이다.

비제차선형미분방정식 식(2.7-22)의 일반해 $y(t)$ 는 이에 대응하는 제차방정식 식(2.7-23)의 일반해 $y_h(t)$ 와 식(2.7-24)의 특수해 $y_p(t)$ 와의 합과 같다.
즉, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ 이다.

제차미분방정식 식(2.7-23)의 일반해 $y_h(t)$ 를 구하는 방법에 대하여는 2.7.1절에서 기술하였으며, 식 (2.7-24)의 임의의 특수해 $y_p(t)$ 를 구하는 방법은 다음과 같다.

- ① 만일 $x(t)$ 가 표2.7-1의 제1열에 있는 함수 중의 하나이면, $y_p(t)$ 는 제2열에 있는 함수로 택하고, y_p 를 식(2.7-24)에 대입하여 계수들을 결정한다.
- ② 만일 $x(t)$ 가 표2.7-1의 제1열에 있는 함수들의 합으로 되어 있다면, $y_p(t)$ 는 이들에 대응하는 행에 있는 함수들의 합으로 택하고, y_p 를 식(2.7-24)에 대입하여 계수들을 결정한다.
- ③ 만일 $x(t)$ 의 한 항이 식(2.7-24)에 대응하는 제차미분방정식의 한 해이면, 다음의 수정법칙에 따라 y_p 의 선택을 수정하여야 한다.

수정법칙 : 제3열에 있는 수가 식(2.7-24)에 대응하는 특성방정식의 단근이면 제2열의 그에 해당되는 행에 있는 식에 t 를 곱하고, 중근이면 제2열의 그에 해당되는 행에 있는 식에 t^2 을 곱한 식을 $y_p(t)$ 로 선택한다.

[예제2.7-5 비제차선형2차미분방정식의 일반해] 다음 미분방정식의 일반해와 주어진 초기치를 만족하는 해를 구하여라.

$$(1) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 6e^{-2t} + 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(2) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 13y(t) = 10\cos 2t + 13, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(3) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 6e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(5) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8e^{-2t} + 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

[풀이]

(1) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ 이므로 제차

미분방정식 $\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_h(t)}{dt} + 3y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = De^{-2t} + K_1 t + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2De^{-2t} + K_1,$$

$$y_p''(t) = 4De^{-2t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_p(t)}{dt} + 3y_p(t) &= 6e^{-2t} + 3t \text{ 에 대입하면} \\ -2De^{-2t} + 3K_1 t + (4K_1 + 3K_0) &= 6e^{-2t} + 3t \end{aligned}$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$-2D = 6,$$

$$3K_1 = 3,$$

$$4K_1 + 3K_0 = 0$$

이어야 하므로 $D = -3$, $K_1 = 1$, $K_0 = -\frac{4}{3}$ 이므로

$$y_p(t) = -3e^{-2t} + t - \frac{4}{3}$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} - 3e^{-2t} + t - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} - 6e^{-2t} + 1$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + C_2 - 6 - \frac{4}{3} = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-C_1 - 3C_2 + 12 + 1 = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_2 = \frac{7}{3}$, $C_1 = 5$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{7}{3}e^{-3t} - 6e^{-2t} + t - \frac{4}{3}$$

이다.

(2) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2 + j3$, $\lambda_2 = -2 - j3$ 이므로 제차미분방정식

$$\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_h(t)}{dt} + 13 y_h(t) = 0 \text{의 일반해 } y_h(t) \text{는}$$

$$y_h(t) = e^{-2t} (A \cos 3t + B \sin 3t)$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1 \cos 2t + K_2 \sin 2t + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2K_1 \sin 2t + 2K_2 \cos 2t,$$

$$y_p''(t) = -4K_1 \cos 2t - 4K_2 \sin 2t$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_p(t)}{dt} + 13 y_p(t) = 10 \cos 2t + 13 \text{에 대입하면}$$

$$(9K_1 + 8K_2) \cos 2t + (-8K_1 + 9K_2) \sin 2t + 13K_0 = 10 \cos 2t + 13$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$9K_1 + 8K_2 = 10,$$

$$-8K_1 + 9K_2 = 0,$$

$$13K_0 = 13$$

이어야 하므로 $K_2 = \frac{80}{145} = \frac{16}{29}$, $K_1 = \frac{90}{145} = \frac{18}{29}$, $K_0 = 1$ 이므로

$$y_p(t) = \frac{18}{29} \cos 2t + \frac{16}{29} \sin 2t + 1$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= e^{-2t} (A \cos 3t + B \sin 3t) + \frac{18}{29} \cos 2t + \frac{16}{29} \sin 2t + 1$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = e^{-2t} \{ (-2A + 3B) \cos 3t - (3A + 2B) \sin 3t \} - \frac{36}{29} \sin 2t + \frac{32}{29} \cos 2t$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$A + \frac{18}{29} + 1 = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-2A + 3B + \frac{32}{29} = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $A = -\frac{47}{29}$, $B = -\frac{97}{87}$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -e^{-2t} \left(\frac{47}{29} \cos 3t + \frac{97}{87} \sin 3t \right) + \frac{18}{29} \cos 2t + \frac{16}{29} \sin 2t + 1$$

이다.

(3) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = +j2$, $\lambda_2 = -j2$ 이므로 제차미분

방정식 $\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + 4y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = 0,$$

$$y_p''(t) = 0$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식 $\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 4y_p(t) = 4$ 에 대입하면

$$0 + 4K_0 = 4$$

에서 $K_0 = 1$ 이므로

$$y_p(t) = 1$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= A \cos 2t + B \sin 2t + 1 \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$A + 1 = 0$$

이고, $y'(0) = 2$ 로부터

$$2B = 2$$

이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -\cos 2t + \sin 2t + 1$$

이다.

(4) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ 이므로 제차

미분방정식 $\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_h(t)}{dt} + 3y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

이다.

$x(t)$ 의 항이 제차미분방정식의 해이고 단근이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = Dte^{-t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = (D - Dt)e^{-t},$$

$$y_p''(t) = (-2D + Dt)e^{-t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_p(t)}{dt} + 3y_p(t) = 6e^{-t} \text{ 에 대입하면}$$

$$2De^{-t} = 6e^{-t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터 $D = 3$ 이므로

$$y_p(t) = 3te^{-t}$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + 3te^{-t} \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = (-C_1 + 3 - 3t)e^{-t} - 3C_2 e^{-3t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + C_2 = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-C_1 + 3 - 3C_2 = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_2 = 1$, $C_1 = -1$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -e^{-t} + e^{-3t} + 3te^{-t}$$

이다.

(5) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 이므로 제차미분방

정식 $\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_h(t)}{dt} + 4y_h(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}$$

이다.

$x(t)$ 의 항이 제차미분방정식의 해이고 이중근이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = Dt^2 e^{-2t} + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = (2Dt - 2Dt^2) e^{-2t},$$

$$y_p''(t) = (2D - 8Dt + 4Dt^2) e^{-2t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_p(t)}{dt} + 4y_p(t) = 8e^{-2t} + 4 \text{에 대입하면}$$

$$2De^{-2t} + 4K_0 = 8e^{-2t} + 4$$

를 얻는다. 위의 식으로부터 $D = 4$, $K_0 = 1$ 이므로

$$y_p(t) = 4t^2 e^{-2t} + 1$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= (C_1 + C_2 t) e^{-2t} + 4t^2 e^{-2t} + 1 \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t) e^{-2t} + (8t - 8t^2) e^{-2t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + 1 = 0$$

이고, $y'(0) = 2$ 로부터

$$C_2 - 2C_1 = 2$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -e^{-2t} + 4t^2 e^{-2t} + 1$$

이다.

[연습문제]

<< 2.1 행렬과 그의 연산 >>

[2.1] $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때, 다음을 구하시오.

- (1) $A + B$ 와 $A - B$
- (2) $2A + 4B$
- (3) A^2 , AB , BA , AC
- (4) $(A + B)^T$ 와 $A^T + B^T$
- (5) A^{-1} 와 B^{-1}
- (6) $A + C$ 는 정의되는가?
- (7) CA 는 정의되는가?

[풀이]

$$(1) \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad 2A + 4B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 9+2 & 3+1 \\ 6+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \\ AB = \begin{bmatrix} 3+2 & -6-2 \\ 2+2 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 3-2 & 1-2 \\ 6-4 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ AC = \begin{bmatrix} 3+2 & -6-2 & 3+1 \\ 2+2 & -4-1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad (A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A^T + B^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2+4} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(6) $A + C$ 는 열의 수가 같지 않으므로 정의되지 않는다.

(7) CA 는 정의되지 않는다.

[2.2] $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때, 다음을 구하시오.

- (1) AB 와 A^TB
- (2) BC , CB , B^TC
- (3) A^TA 와 AA^T
- (4) B^TB 와 BB^T
- (5) C^{-1} 와 $(B^TB)^{-1}$

[풀이]

$$(1) AB = [3+0+2 \ 0+0-2] = [5 \ -2]$$

A^TB 는 정의되지 않는다.

(2) BC 는 정의되지 않는다.

$$CB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+1 & 0+0-1 \\ 0+0+0 & 0+4+0 \\ -6+0+1 & 0+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^TC = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0-2 & 0+0+1 & 3+0+1 \\ 0+0+2 & 0+4-1 & 0+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A^TA = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = [1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = [1+0+4] = [5]$$

$$(4) B^TB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+0+1 & 0+0-1 \\ 0+0-1 & 0+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+0 & 0+0 & 3+0 \\ 0+0 & 0+4 & 0-2 \\ 3+0 & 0-2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(5) \det(C) = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 2+0+4 \\ = 6$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

이므로

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다.

$$(B^T B)^{-1} = \frac{1}{50-1} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{49} & \frac{1}{49} \\ \frac{1}{49} & \frac{10}{49} \end{bmatrix}$$

[2.3] 다음 행렬들의 계수(rank)는 얼마인가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

[풀이] $rank(A) = 2$, $rank(B) = 1$, $rank(C) = 2$ 이다.

[2.4] 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

$$(1) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[풀이]

$$(1) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-1+0} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2.5] 다음 연립1차방정식의 해를 소거법 또는 대입법으로 구하여라.

$$(1) \quad \begin{cases} x+2y = 5 \\ 2x-y = 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2x+y+2z = -1 \\ x+z = -1 \\ x+3y-2z = 7 \end{cases}$$

[풀이]

$$(1) \quad x+2y = 5 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$2x-y = 3 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

① + ② × 2 하면, $5x = 11$ 에서 $x = \frac{11}{5}$ 이고, 이 것을 식 ②에 대입하면 $y = \frac{7}{5}$ 이

다.

$$(2) \quad 2x+y+2z = -1 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$x+z = -1 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

$$x+3y-2z = 7 \quad \text{-----} \quad \textcircled{3}$$

① × 3 - ③ 하면 다음의 식을 얻는다.

$$5x+8z = -10 \quad \text{-----} \quad \textcircled{4}$$

② × 8 - ④ 하면 $3x = 2$ 으로부터

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{-----} \quad \textcircled{5}$$

이다.

⑤를 ②에 대입하면,

$$z = -\frac{5}{3} \quad \text{-----} \quad \textcircled{6}$$

이다. ⑤와 ⑥을 ①에 대입하면

$$y = 1$$

이다.

[2.6] [2.5]의 연립1차방정식을 벡터방정식으로 나타내면 다음과 같다. 벡터방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

[풀이]

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{-1-4} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (-3) - (-2-1) + 2 \times 3 \\
&= 3,
\end{aligned}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-2 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

이므로

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 8 & -6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3-8+7 \\ -3+6+0 \\ -3+5-7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

<< 2.2 복소수, 복소변수와 복소함수 >>

[2.7] $z_1 = 1 + j$, $z_2 = 2 \angle \frac{\pi}{6}$ 일 때, 다음을 구하여라.

(1) $z_1 + z_2$ (2) $z_1 - z_2$ (3) $z_1 z_2$ (4) $\frac{z_1}{z_2}$

[풀이]

$$\begin{aligned}
(1) \quad z_1 + z_2 &= 1 + j + 2 \angle \frac{\pi}{3} \\
&= 1 + j + (2 \cos \frac{\pi}{3} + j2 \sin \frac{\pi}{3}) \\
&= (1 + j) + (1 + j\sqrt{3}) \\
&= 2 + j(1 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad z_1 - z_2 &= 1 + j - 2 \angle \frac{\pi}{3} \\
&= (1 + j) - (2 \cos \frac{\pi}{3} + j2 \sin \frac{\pi}{3}) \\
&= (1 + j) - (1 + j\sqrt{3}) \\
&= j(1 - \sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad z_1 z_2 &= (\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4})(2 \angle \frac{\pi}{3}) \\
&= 2\sqrt{2} \angle (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) \\
&= 2\sqrt{2} \angle \frac{7}{12} \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}}{2 \angle \frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \angle (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \angle \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

[2.8] 다음 복소함수들의 극과 영점을 찾고, 극점과 영점의 위치를 s 평면 위에 나타내어라.

$$(1) F(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+3)} \quad (2) F(s) = \frac{3s(s+4)}{(s+3)(s^2+3s+2)}$$

$$(3) F(s) = \frac{20}{s(s^2+2s+2)} \quad (4) F(s) = \frac{s^2+2s+5}{s^2+5s+6}$$

[풀이]

(1) 극은 $s=0$, $s=0$, $s=-3$ 이고 영점은 $s=-2$, $s=\infty$ 에 2개 있으며, 극과 영점을 s 평면 위에 나타내면 그림2.8-1과 같다.

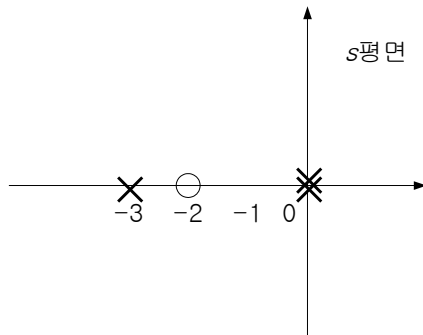


그림2.8-1 극과 영점의 위치

$$(2) F(s) = \frac{3s(s+4)}{(s+3)(s^2+3s+2)}$$

$$= \frac{3s(s+4)}{(s+3)(s+1)(s+2)}$$

이므로 극은 $s=-1$, $s=-2$, $s=-3$ 이고 영점은 $s=0$, $s=-4$, $s=\infty$ 에 있으며, 극과 영점을 s 평면 위에 나타내면 그림2.8-2와 같다.

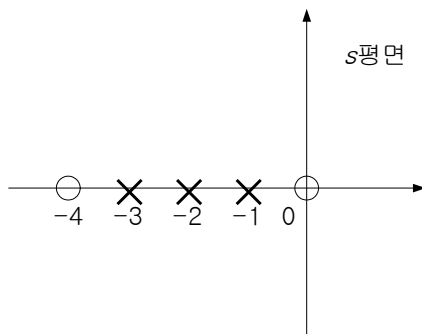


그림2.8-2 극과 영점의 위치

$$(3) \quad F(s) = \frac{20}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$= \frac{20}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

이므로 극은 $s=0$, $s=-1-j$, $s=-1+j$ 이고 영점은 $s=\infty$ 에 3개 있으며, 극과 영점을 s 평면 위에 나타내면 그림2.8-1과 같다.

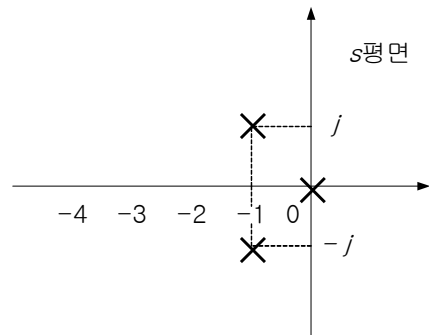


그림2.8-3 극과 영점의 위치

(4) 극은 $s=0$, $s=0$, $s=-3$ 이고 영점은 $s=-2$, $s=\infty$ 에 2개 있으며, 극과 영점을 s 평면 위에 나타내면 그림2.8-1과 같다.

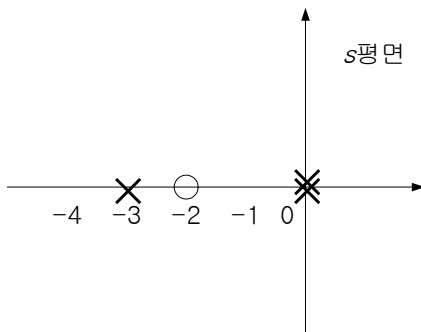


그림2.8-1 극과 영점의 위치

<< 2.3 삼각함수의 기초 >>

[2.9] 다음의 함수 $v(t)$ 를 $v(t) = r \sin(t + \theta)$ 와 $v(t) = r \cos(t + \theta)$ 의 꼴로 변형하시오.

- (1) $v(t) = 2\sin 2t + 2\cos 2t$ (2) $v(t) = 2\sin 2t - 2\cos 2t$
 (3) $v(t) = \sin 5t + 2\cos 5t$ (4) $v(t) = \sin 5t - 2\cos 5t$
 (5) $v(t) = -\sin 3t + \sqrt{3}\cos 3t$ (6) $v(t) = -\sin 3t - \sqrt{3}\cos 3t$

[풀이]

- (1) 그림p2.9-1의 (a)에서와 같이, $\sin 2t$ 의 계수 2를 x 좌표, $\cos 2t$ 의 계수 2를 y 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{2}{2} = 1$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이다. $2 = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$, $2 = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$ 이므로

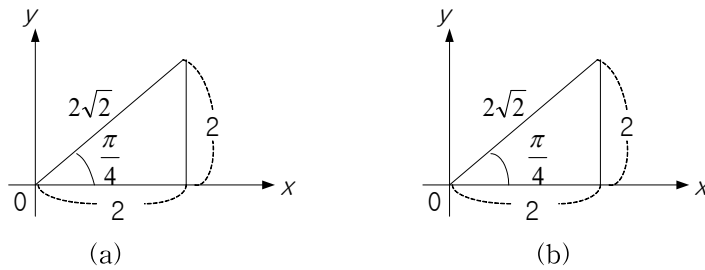
$$\begin{aligned}
r(t) &= 2 \sin 2t + 2 \cos 2t \\
&= (2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}) \sin 2t + (2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) \cos 2t \\
&= 2\sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

이다.

그림p2.9-1의 (b)에서와 같이, $\sin 2t$ 의 계수 2를 y 좌표, $\cos 2t$ 의 계수 2를 x 좌표로 할 때, $\tan \theta = 1$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이다. $2 = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$, $2 = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
r(t) &= 2 \sin 2t + 2 \cos 2t \\
&= (2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) \sin 2t + (2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}) \cos 2t \\
&= 2\sqrt{2} \cos(2t - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

이다.



그림p2.9-1 삼각함수의 합성

(2) 그림p2.9-2의 (a)에서와 같이, $\sin 2t$ 의 계수 2를 x 좌표, $\cos 2t$ 의 계수 -2를 y 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{-2}{2} = -1$ 에서 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 이다. $2 = 2\sqrt{2} \cos(-\frac{\pi}{4})$, $-2 = 2\sqrt{2} \sin(-\frac{\pi}{4})$ 이므로

$$\begin{aligned}
r(t) &= 2 \sin 2t - 2 \cos 2t \\
&= (2\sqrt{2} \cos(-\frac{\pi}{4})) \sin 2t + (2\sqrt{2} \sin(-\frac{\pi}{4})) \cos 2t \\
&= 2\sqrt{2} \sin(2t - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

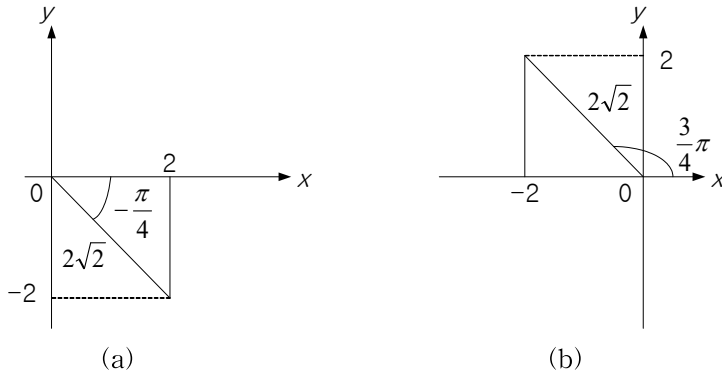
이다.

그림p2.9-2의 (b)에서와 같이, $\sin 2t$ 의 계수 2를 y 좌표, $\cos 2t$ 의 계수 -2를 x 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{-2}{2} = -1$ 에서 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 이다. $2 = 2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4}$, $-2 = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
r(t) &= 2 \sin 2t - 2 \cos 2t \\
&= (2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4}) \sin 2t + (2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}) \cos 2t
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2} \cos(2t - \frac{3\pi}{4})$$

이다.



그림p2.9-2 삼각함수의 합성

(3) 그림p2.9-3의 (a)에서와 같이, $\sin 5t$ 의 계수 1을 x 좌표, $\cos 5t$ 의 계수 2를 y 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{2}{1}$ 에서 $\theta = \tan^{-1} 2$ 이다. $1 = \sqrt{5} \cos \theta$, $2 = \sqrt{5} \sin \theta$ 이므로

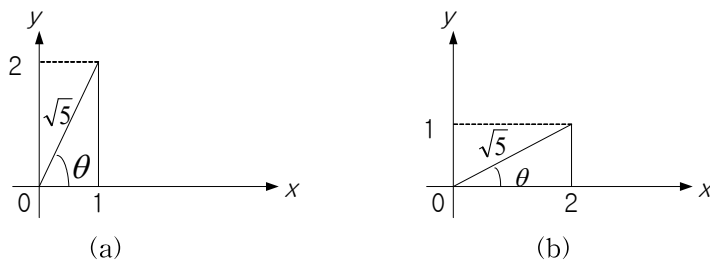
$$\begin{aligned} v(t) &= \sin 5t + 2 \cos 5t \\ &= (\sqrt{5} \cos \theta) \sin 5t + (\sqrt{5} \sin \theta) \cos 5t \\ &= \sqrt{5} \sin(5t + \tan^{-1} 2) \end{aligned}$$

이다.

그림p2.9-3의 (b)에서와 같이, $\sin 5t$ 의 계수 1을 y 좌표, $\cos 5t$ 의 계수 2를 x 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2}$ 이다. $1 = \sqrt{5} \sin \theta$, $2 = \sqrt{5} \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= \sin 5t + 2 \cos 5t \\ &= (\sqrt{5} \sin \theta) \sin 5t + (\sqrt{5} \cos \theta) \cos 5t \\ &= \sqrt{5} \cos(5t - \tan^{-1} \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

이다.



그림p2.9-3 삼각함수의 합성

(4) 그림p2.9-4의 (a)에서와 같이, $\sin 5t$ 의 계수 1을 x 좌표, $\cos 5t$ 의 계수 -2를 y 좌표로 할 때,

$\tan \theta = \frac{-2}{1} = -2$ 에서 $\theta = \tan^{-1} -2$ 이다. $1 = \sqrt{5} \cos \theta$, $-2 = \sqrt{5} \sin \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin 5t - 2 \cos 5t \\ &= (\sqrt{5} \cos \theta) \sin 5t + (\sqrt{5} \sin \theta) \cos 5t \\ &= \sqrt{5} \sin(5t + \tan^{-1} -2) \end{aligned}$$

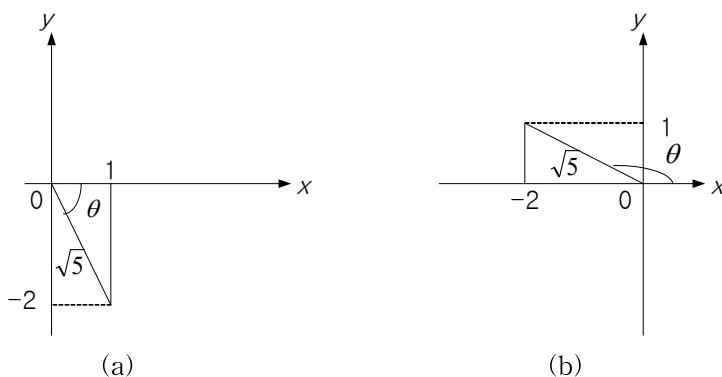
이다.

그림p2.9-4의 (b)에서와 같이, $\sin 5t$ 의 계수 1을 y 좌표, $\cos 5t$ 의 계수 -2를 x 좌표로 할 때,

$\tan \theta = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \tan^{-1} -\frac{1}{2}$ 이다. $1 = \sqrt{5} \sin \theta$, $-2 = \sqrt{5} \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin 5t - 2 \cos 5t \\ &= (\sqrt{5} \sin \theta) \sin 5t + (\sqrt{5} \cos \theta) \cos 5t \\ &= \sqrt{5} \cos(5t - \tan^{-1} -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

이다.



그림p2.9-4 삼각함수의 합성

(5) 그림p2.9-5의 (a)에서와 같이, $\sin 3t$ 의 계수 -1을 x 좌표, $\cos 3t$ 의 계수 $\sqrt{3}$ 을 y 좌표로 할 때,

$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ 에서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 이다. $-1 = 2 \cos \frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{3} = 2 \sin \frac{2\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} r(t) &= -\sin 3t + \sqrt{3} \cos 3t \\ &= (2 \cos \frac{2\pi}{3}) \sin 3t + (2 \sin \frac{2\pi}{3}) \cos 3t \\ &= 2 \sin(3t + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

이다.

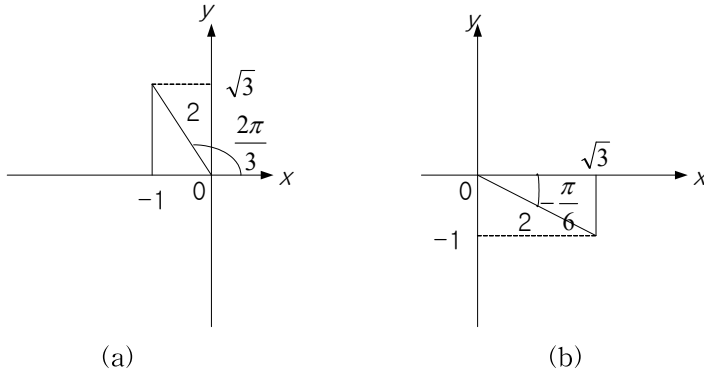
그림p2.9-5의 (b)에서와 같이, $\sin 3t$ 의 계수 -1을 y 좌표, $\cos 3t$ 의 계수 $\sqrt{3}$ 을 x 좌표로 할 때,

$\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이다. $-1 = 2 \sin(-\frac{\pi}{6})$, $\sqrt{3} = 2 \cos(-\frac{\pi}{6})$ 이므로

$$r(t) = -\sin 3t + \sqrt{3} \cos 3t$$

$$\begin{aligned}
&= (2 \sin(-\frac{\pi}{6}))\sin 3t + (2 \cos(-\frac{\pi}{6}))\cos 3t \\
&= 2 \cos(3t + \frac{\pi}{6})
\end{aligned}$$

이다.



그림p2.9-5 삼각함수의 합성

(6) 그림p2.9-6의 (a)에서와 같이, $\sin 3t$ 의 계수 -1 을 x 좌표, $\cos 3t$ 의 계수 $-\sqrt{3}$ 을 y 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1}$ 에서 $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ 이다. $-1 = 2 \cos(-\frac{2\pi}{3})$, $-\sqrt{3} = 2 \sin(-\frac{2\pi}{3})$ 이므로

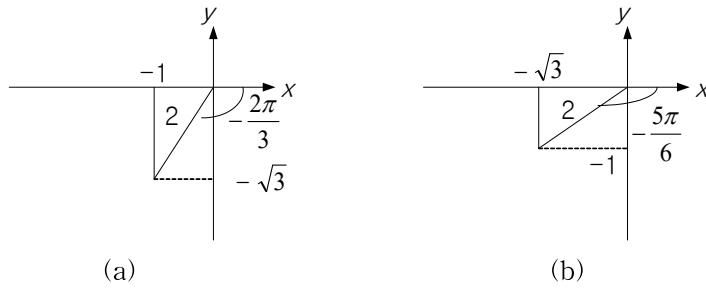
$$\begin{aligned}
r(t) &= -\sin 3t - \sqrt{3} \cos 3t \\
&= (2 \cos(-\frac{2\pi}{3}))\sin 3t + (2 \sin(-\frac{2\pi}{3}))\cos 3t \\
&= 2 \sin(3t - \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}$$

이다.

그림p2.9-6의 (b)에서와 같이, $\sin 3t$ 의 계수 -1 을 y 좌표, $\cos 3t$ 의 계수 $-\sqrt{3}$ 을 x 좌표로 할 때, $\tan \theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$ 에서 $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ 이다. $-1 = 2 \sin(-\frac{5\pi}{6})$, $-\sqrt{3} = 2 \cos(-\frac{5\pi}{6})$ 이므로

$$\begin{aligned}
r(t) &= -\sin 3t + \sqrt{3} \cos 3t \\
&= (2 \sin(-\frac{5\pi}{6}))\sin 3t + (2 \cos(-\frac{5\pi}{6}))\cos 3t \\
&= 2 \cos(3t + \frac{5\pi}{6})
\end{aligned}$$

이다.

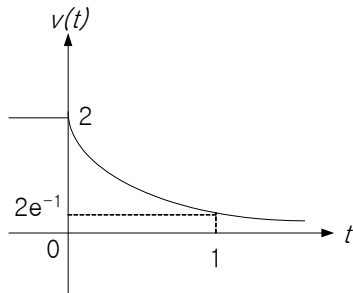


그림p2.9-6 삼각함수의 합성

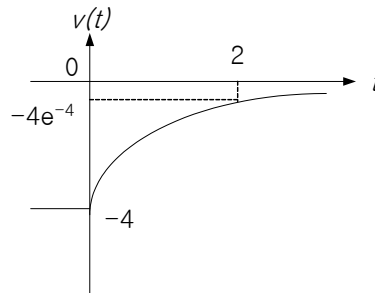
<< 2.4 함수와 그래프 >>

[2.10] 다음과 같은 그래프로 표현되는 함수를 식으로 나타내어라.

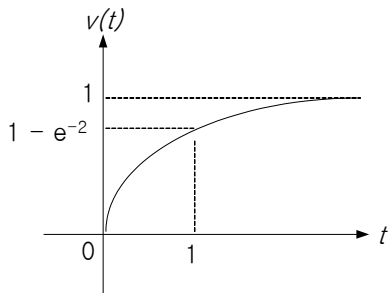
(1)



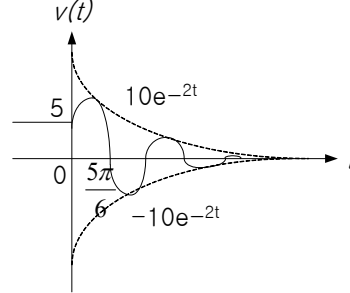
(2)



(3)



(4)



[풀이]

(1) $t < 0$ 에서, $v(t) = 2$ 이다.

$t \geq 0$ 에서, $v(t) = ae^{-bt}$ 이다.

$v(0) = a = 2$ 이고, $v(1) = 2e^{-1} = 2e^{-b}$ 에서 $b = 1$ 이다.

따라서, $v(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ 2e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 이다.

(2) $t < 0$ 에서, $v(t) = -4$ 이다.

$t \geq 0$ 에서, $v(t) = ae^{-bt}$ 이다.

$v(0) = a = -4$ 이고, $v(2) = -4e^{-4} = -4e^{-2b}$ 에서 $b = 2$ 이다.

따라서, $v(t) = \begin{cases} -4, & t < 0 \\ -4e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 이다.

(3) $t < 0$ 에서, $v(t) = 0$ 이다.

$t \geq 0$ 에서, $v(t) = 1 - ae^{-bt}$ 이다.

$v(0) = 1 - a = 0$ 이므로 $a = 1$ 이고, $v(1) = 1 - e^{-b} = 1 - e^{-2}$ 에서 $b = 2$ 이다.

따라서, $v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 이다.

(4) $t < 0$ 에서, $v(t) = 5$ 이다.

$t \geq 0$ 에서, $v(t) = 10e^{-2t}\sin(at + \theta)$ 이다.

$v(0) = 10\sin\theta = 5$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이고,

$v(\frac{5\pi}{6}) = 10e^{-2\frac{5\pi}{6}}\sin(a\frac{5\pi}{6} + \theta) = 0$ 으로부터 $a\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$ 이므로

$a = 1$ 이다.

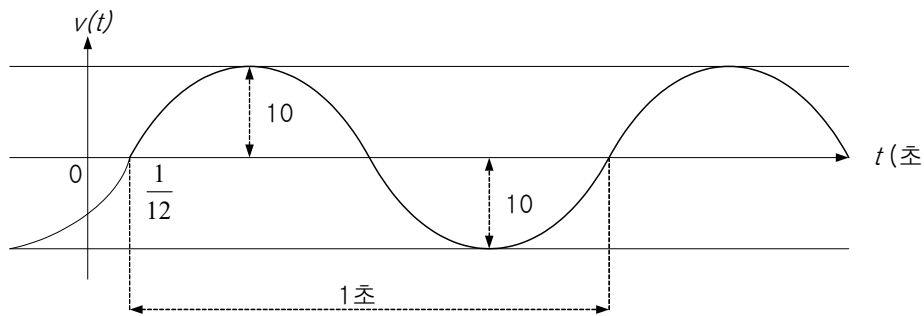
따라서, $v(t) = \begin{cases} 5, & t < 0 \\ 10e^{-2t}\sin(t + \frac{\pi}{6}), & t \geq 0 \end{cases}$ 이다.

[2.11] 그림p2.4-11과 같은 삼각함수 $v(t)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $v(t)$ 의 주기 T , 주파수 f , 각주파수 ω , 진폭 V_m 을 구하여라.

(2) $v(t)$ 를 sine 함수로 나타내어라.

(3) $v(t)$ 를 cosine 함수로 나타내어라.



그림p2.4-11

[풀이]

(1) 그림2.4-12로부터, 주기 $T = 1$ [초], 주파수 $f = \frac{1}{T} = 1$ [Hz], 각주파수 $\omega = 2\pi f = 2\pi$ [rad/sec], 진폭 $V_m = 10$ 이다.

(2) 그림p2.4-11에서, $v(t)$ 는 $V_m \sin \omega t$ 를 오른쪽으로 $\frac{1}{12}$ 만큼 이동한 것이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin(\omega t - \Theta) \\ &= V_m \sin \omega(t - \frac{\Theta}{\omega}) \\ &= 10 \sin 2\pi(t - \frac{1}{12}) \end{aligned}$$

이다.

(3) 그림p2.4-11에서, $v(t)$ 는 $V_m \cos \omega t$ 를 오른쪽으로 $\frac{1}{4}T + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ 만큼 이동한 것이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t - \Theta) \\ &= V_m \cos \omega(t - \frac{\Theta}{\omega}) \\ &= 10 \cos 2\pi(t - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

이다.

[2.12] 다음의 삼각함수에서, $v(t)$ 의 각주파수 ω , 주파수 f , 주기 T , 진폭 V_m 은 얼마인 가?

$$(1) v(t) = 380 \sin(1000\pi t + 30^\circ) \quad (2) v(t) = 50 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{6})$$

[풀이]

(1) 각주파수 $\omega = 1000\pi$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 500$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = 2$ [ms],

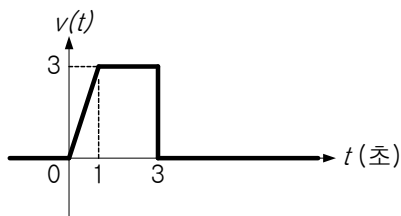
진폭 $V_m = 380$ 이다.

(2) 각주파수 $\omega = 100\pi$ [rad/sec], 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ [Hz], 주기 $T = \frac{1}{f} = 20$ [ms],

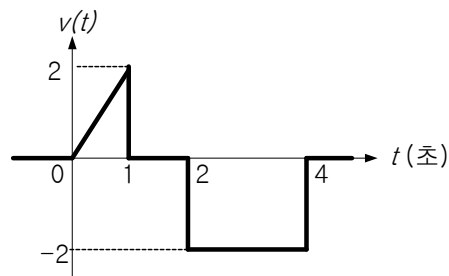
진폭 $V_m = 50$ 이다.

[2.13] 다음에 도시된 함수 $v(t)$ 를 단위계단함수 $u_s(t)$ 와 단위램프함수 $r_s(t)$ 로 나타내어라.

(1)



(2)



[풀이]

(1) $v(t) = 3tu_s(t) - 3(t-1)u_s(t-1) - 3u_s(t-1)$ 이다.

(2) $v(t) = 2tu_s(t) - 2(t-1)u_s(t-1) - 2u_s(t-1) - 2u_s(t-2) + 2u_s(t-4)$ 이다.

[2.14] 다음 지수함수들의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $v(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$

(2) $v(t) = \begin{cases} -e^{-2t}, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

(3) $v(t) = \begin{cases} e^{-2t} + 2e^{-3t}, & t \geq 0 \\ 3, & t < 0 \end{cases}$

(4) $v(t) = \begin{cases} te^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(5) $v(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

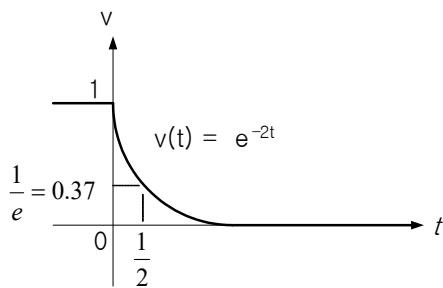
(6) $v(t) = \begin{cases} 3 - e^{-t} - e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$

(7) $v(t) = \{1 - e^{-2(t-1)}\}u_s(t-1)$

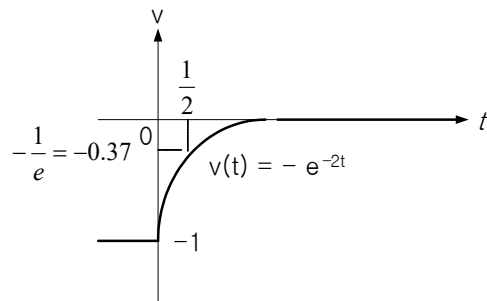
(8) $v(t) = \{2 - e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\}u_s(t-1)$

[풀이]

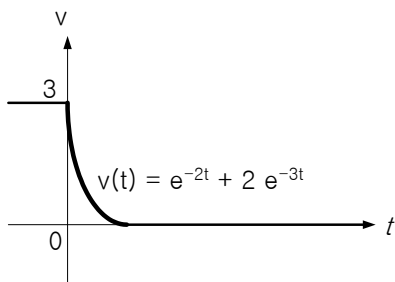
(1)



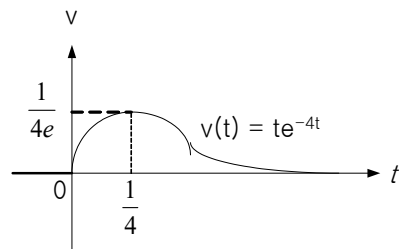
(2)



(3)

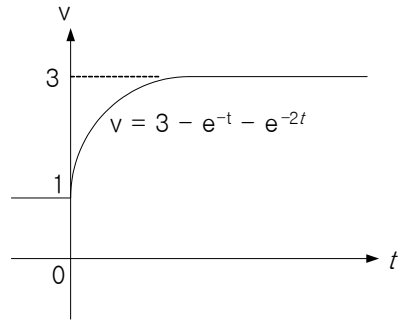
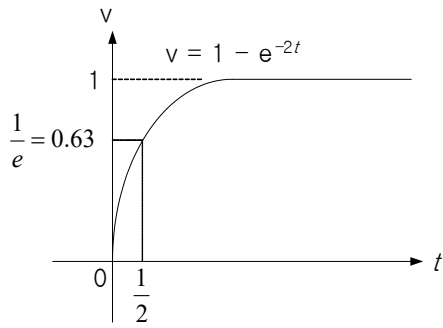


(4)

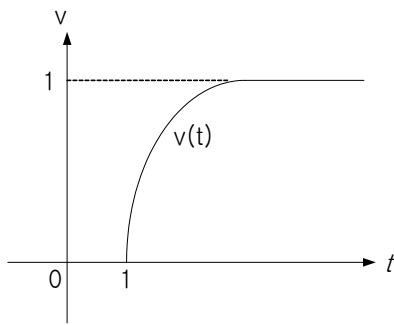


(5)

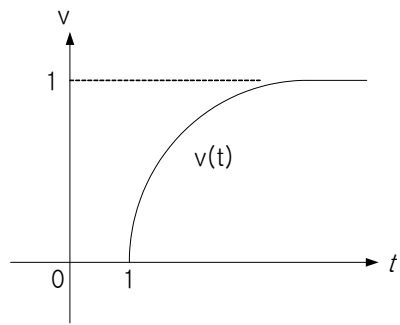
(6)



(7)



(8)



[2.15] 다음 삼각함수들의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $v_1(t) = 2 \sin 2t$ 와 $v_2(t) = 2 \sin(2t + \frac{1}{2})$

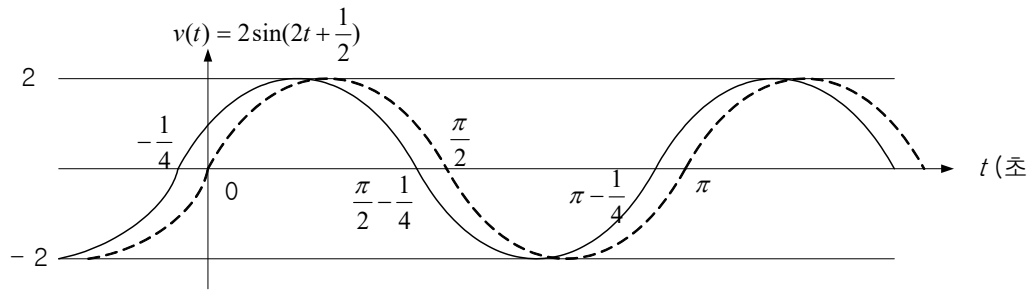
(2) $v_1(t) = -2 \sin 2\pi t$ 와 $v_2(t) = -2 \sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$

(3) $v_1(t) = 2 \cos 2t$ 와 $v_2(t) = 1 + 2 \cos(2t - \frac{\pi}{4})$

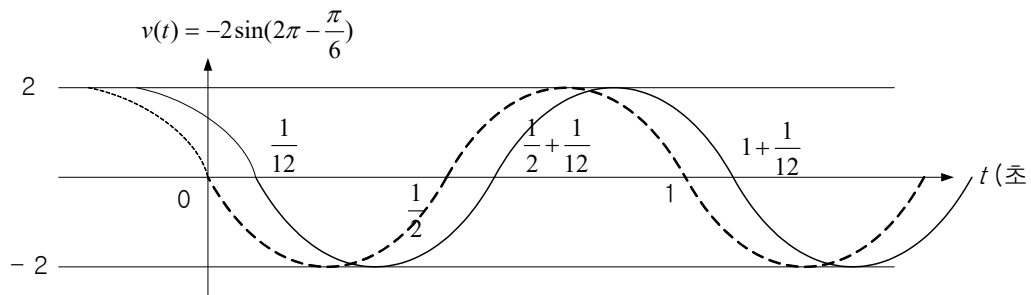
(4) $v(t) = 2 - 4 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{3})$

[풀이]

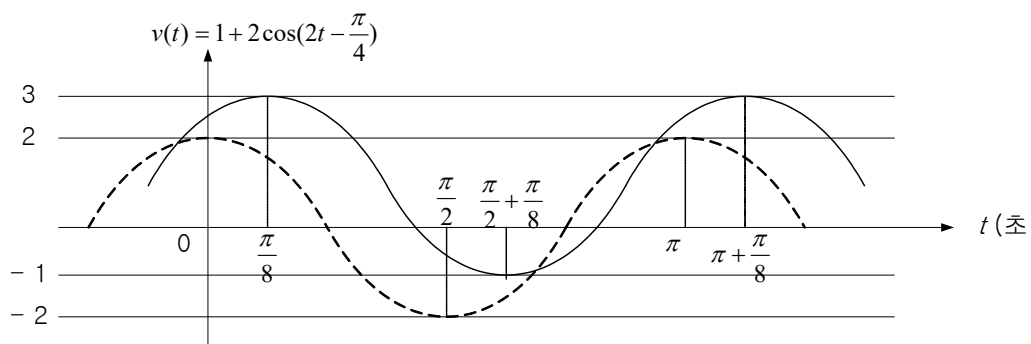
(1) $v_2(t) = 2 \sin(2t + \frac{1}{2}) = 2 \sin 2(t + \frac{1}{4})$ 이므로 $v_2(t)$ 는 $v_1(t) = 2 \sin 2t$ 를 t 축으로 $-\frac{1}{4}$ 만큼 이동시킨 것이다.



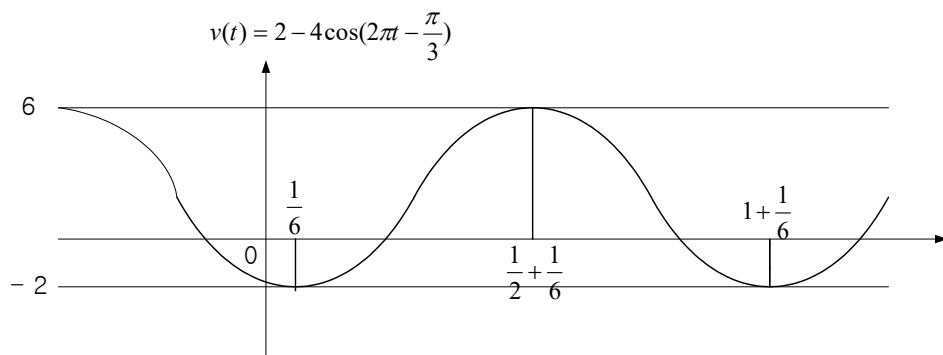
- (2) $v_2(t) = -2 \sin(2\pi t - \frac{\pi}{6}) = -2 \sin 2\pi(t - \frac{1}{12})$ 이므로 $v_2(t)$ 는 $v_1(t) = -2 \sin 2\pi t$ 를 t 축으로 $\frac{1}{12}$ 만큼 이동시킨 것이다.



- (3) $v_2(t) = 1 + 2 \cos(2t - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2 \cos 2(t - \frac{\pi}{8})$ 이므로 $v_2(t)$ 는 $v_1(t) = 2 \cos 2t$ 를 t 축으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼, $v(t)$ 축으로 1만큼 이동시킨 것이다.



- (4) $v(t) = 2 - 4 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{3}) = 2 - 4 \cos 2\pi(t - \frac{1}{6})$ 이고 그래프는 다음과 같다.



[2.16] 다음 함수들의 그래프의 개형을 그려라.

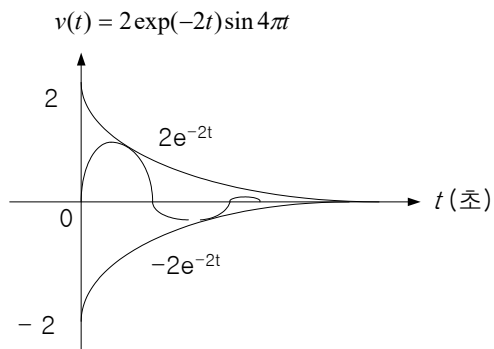
(1) $v(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}\sin 4\pi t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (2) $v(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}\sin(4\pi t - \frac{\pi}{6}), & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

(3) $y = \begin{cases} 2e^{-2t}\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

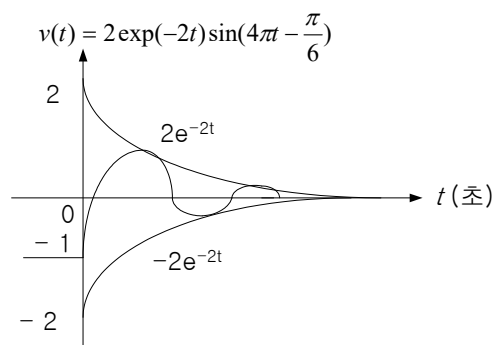
(4) $v(t) = \begin{cases} 1 + 2e^{-2t}\sin(4\pi t - \frac{\pi}{6}), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

[풀이]

(1)

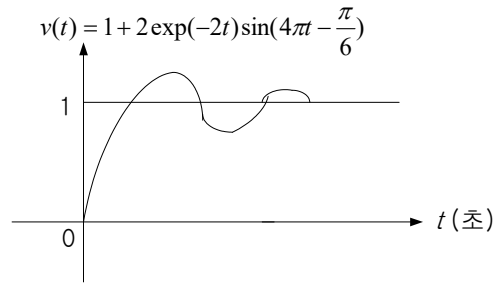
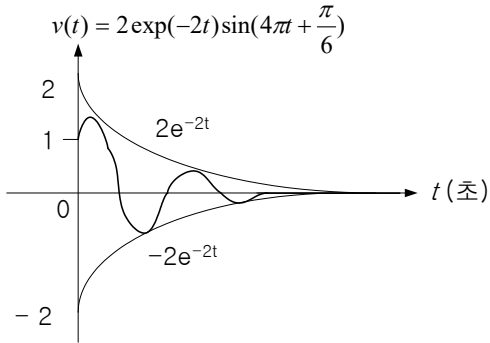


(2)



(3)

(4)



<< 2.5 미분 >>

[2.17] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$(1) \ y = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 1) \quad (2) \ y = \frac{2}{x^4 + 2}$$

$$(3) \ y = 2x^4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad (4) \ y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$(5) \ y = x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3x} \quad (6) \ y = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

[풀이] 미분공식에 의하여,

$$(1) \ \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x - 2) \times 2x + (2x + 2) \times (x^2 + 1) \\ = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 2$$

$$(2) \ \frac{dy}{dx} = \frac{0 - 2 \times 4x^3}{(x^4 + 2)^2} \\ = -\frac{8x^3}{(x^4 + 2)^2}$$

$$(3) \ y = 2x^4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 2x^4 + x^{-1} - x^{-2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - x^{-2} + 2x^{-3} \\ = 8x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

또는 $y = 2x^4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ 에서

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + \frac{x \times 0 - 1 \times 1}{x^2} - \frac{x^2 \times 0 - 1 \times 2x}{x^4} \\ = 8x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

이다.

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (3x)^{-\frac{1}{2}} \times 3$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

$$(6) \quad y = x^{\frac{1}{3}} + (2x)^{-\frac{1}{2}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} (2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{4x\sqrt{2x}} \cdot 6$$

[2.18] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$(1) \quad y = (2t + 1)^2 \qquad (2) \quad y = (t^2 - 2)^2 (t - 1)$$

$$(3) \quad y = \frac{3x + 2}{2x + 1} \qquad (4) \quad y = 3\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(5) \quad y = \sqrt[3]{3x^2 + 1} \qquad (6) \quad y = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

[풀이] 미분공식에 의하여,

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = 2(2t + 1) \times 2 = 4(2t + 1)$$

$$(2) \quad y = 2(t^2 - 2)(2t)(t - 1) + (t^2 - 2)^2 \times 1$$

$$= (t^2 - 2)\{(4t^2 - 4t) + (t^2 - 2)\}$$

$$= (t^2 - 2)(5t^2 - 4t - 2)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(2x + 1) \times 3 - (3x + 2) \times 2}{(2x + 1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(2x + 1)^2}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \times (4x + 2)$$

$$= \frac{3(2x + 1)}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$(5) \quad y = \sqrt[3]{3x^2 + 1} = (3x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (3x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \times 6x$$

$$= \frac{2x}{(3x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2 + 1)^2}}$$

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} = (4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \times 8x$$

$$= -\frac{4x}{(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}}$$

[2.19] 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(1) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} - t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \frac{t}{1+t} \end{cases}$

[풀이]

(1) $\frac{dx}{dt} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 이고, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 1$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{1 - 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$= 1 - 2\sqrt{t}$$

$$= 1 - x$$

이다.

(2) $\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{(1+t)^2}$ 이고, $\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= -1$$

이다.

[2.20] 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2) x^2 - 6xy + y^2 = 0$$

[풀이]

(1) y 를 x 의 함수로 보고 합성함수의 미분법에 따르면 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$ 이다.

따라서, $y \neq 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ 이다.

(2) y 를 x 의 함수로 보고 합성함수의 미분법에 따르면

$$2x - 6y - 6x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

이다. 따라서, $3x - y \neq 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{3x - y}$ 이다.

[2,21] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$(1) y(t) = 4 \sin 2t \cos 3t \quad (2) y(t) = 10 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(3) y(t) = (2 - t \cos t)^2 \quad (4) y(t) = \sqrt{2 \sin t + 4}$$

[풀이] 미분공식에 의하여,

$$(1) \frac{dy}{dt} = 4(\cos 2t \times 2) \cos 3t + 4(\sin 2t) \times (-\sin 3t \times 3) \\ = 8 \cos 2t \cos 3t - 12 \sin 2t \sin 3t$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = 10 \times (-\sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})) \times 2\pi \\ = -20\pi \sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$(3) \frac{dy}{dt} = 2(2 - t \cos t) \times (2 - t \cos t)' \\ = 2(2 - t \cos t)(-\cos t + t \sin t)$$

$$(4) \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2 \sin t + 4}} \times (2 \sin t + 4)' \\ = \frac{1}{2\sqrt{2 \sin t + 4}} \times (2 \cos t) \\ = \frac{\cos t}{\sqrt{2 \sin t + 4}}$$

[2,22] 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

$$(1) y(t) = 4 + 2e^{-t} + 3e^{2t} \quad (2) y(t) = 1 + 2e^{-4t} \sin(2t + \frac{\pi}{6})$$

[풀이]

$$(1) \frac{dy}{dt} = -2e^{-t} + 6e^{2t}$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = -8e^{-4t} \sin(2t + \frac{\pi}{6}) + 2e^{-4t} \cos(2t + \frac{\pi}{6}) \times 2$$

$$= -4e^{-4t} \{ 2 \sin(2t + \frac{\pi}{6}) - \cos(2t + \frac{\pi}{6}) \}$$

[2.23] 다음의 함수에 대하여 물음에 답하여라.

$$y = 2x^3 + x + 4t - \cos(3t - \frac{\pi}{3})$$

$$(1) \frac{dy}{dx} \text{를 구하여라.}$$

$$(2) \frac{dy}{dt} \text{를 구하여라.}$$

[풀이]

(1) t 는 상수로 취급되므로

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 1$$

이다.

(2) x 는 상수로 취급되므로

$$\frac{dy}{dt} = 4 + 3 \sin(3t - \frac{\pi}{3})$$

이다.

[2.24] 다음 함수들의 제3차도함수를 구하여라.

$$(1) y = x^2 + 3x - 4 \quad (2) y = 1 - e^{-2x}$$

$$(3) y = xe^{-x} \quad (4) y = V_m \cos \omega x$$

[풀이]

$$(1) y' = 2x + 3, \quad y'' = 2, \quad y''' = 0$$

$$(2) y' = 2e^{-2x}, \quad y'' = -4e^{-2x}, \quad y''' = 8e^{-2x}$$

$$(3) y' = e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} = (1 - x)e^{-x},$$

$$y'' = (-1)e^{-x} + (1 - x) \times (-1)e^{-x} = (-2 + x)e^{-x},$$

$$y''' = e^{-x} + (-2 + x) \times (-1)e^{-x} = (3 - x)e^{-x}$$

$$(4) y' = -V_m \omega \sin \omega x, \quad y'' = -V_m \omega^2 \cos \omega x, \quad y''' = V_m \omega^3 \sin \omega x$$

[2.25] 다음 곡선의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

$$(1) y = x^3 + 1 \quad (1, 2) \quad (2) x^2 + y^2 = r^2 \quad (a, b)$$

[풀이]

(1) 점 $(1, 2)$ 에 접하는 접선의 기울기는

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 3 \left. x^2 \right|_{x=1} = 3$$

이고, 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 2 = 3(x - 1),$$

즉, $y = 3x - 1$ 이다.

(2) $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 로 미분하면 $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 이다.

임의의 점 (a, b) 에 접하는 접선의 기울기는 $-\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$ 이고, 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$y - b = -\frac{a}{b}(x - a)$$

이다.

[2.26] 지면으로부터 높이가 15m인 빌딩 꼭대기에서 어떤 물체를 초속도 v_0 [m/sec]로 똑바로 위로 던질 때, 던진 후 t 초에서의 빌딩 꼭대기로부터의 높이 $h(t)$ 는

$$h(t) = v_0 t - 5t^2 [m]$$

로 주어진다. $v_0 = 10$ [m/sec]일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 최고점에 도달하는 시간과 그 때의 지상으로부터의 높이를 구하여라.
- (2) 이 공이 땅에 떨어질 때의 속도와 가속도를 구하여라.

[풀이] $h(t) = 10t - 5t^2 [m]$ 이므로 $\frac{dh}{dt} = 10 - 10t$ 이고 $\frac{d^2h}{dt^2} = -10$ 이다.

(1) 최고점에서는 $\frac{dh}{dt} = 0$ 이므로 $10 - 10t = 0$ 에서 $t = 1$ [초]이다.

$t = 1$ 에서 지상으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} 15 + h(t = 1) &= 15 + 10 \times 1 - 5 \times 1^2 \\ &= 20[m] \end{aligned}$$

이다.

(2) $h = -15$ 일 때 물체가 땅에 떨어지므로 $-15 = 10t - 5t^2$ 에서

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

에서 $t = 3$ [초]이다. 따라서, $t = 3$ 초에서의 속도는

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=3} = -20 [m/sec]$$

이고, $t = 3$ 초에서의 가속도는

$$\frac{d^2h}{dt^2} \Big|_{t=3} = -10 \text{ [m/sec}^2\text{]}$$

이다.

[2.27] 수평면과 이루는 각 θ 의 방향으로 초속도 v_0 [m/sec]로 지면에서 던진 물체의 운동은 공기의 저항을 무시하면 $x = v_0 t \cos \theta$ [m], $y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$ [m]로 나타내 진다. t 초 후의 속도벡터, 가속도 벡터 및 그 크기를 구하여라. 단, g 는 중력가속도, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $v_0 > 0$ 이다.

$$[\text{풀이}] \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \theta - g t,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$$

이므로, 속도벡터 $\vec{v}$ 는

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - g t)$$

이고, 가속도벡터 $\vec{a}$ 는

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$$

이다. 또한 그의 크기는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - g t)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 g t \sin \theta + g^2 t^2} \\ |\vec{a}| &= g \end{aligned}$$

[2.28] 동점 P 의 x, y 좌표가 시각 $t (t \geq 0)$ 의 함수로서 다음과 같이 기술될 때, 다음 물음에 답하여라.

$$x(t) = t + 1, \quad y(t) = t - t^2$$

(1) 점 P 의 자취를 구하여라.

(2) $t = 3$ [초]에서의 점 P 의 속도벡터 $\vec{v}$ 와 가속도벡터 $\vec{a}$ 를 구하여라.

(3) $t = 3$ [초]에서의 점 P 의 속도벡터의 방향을 구하여라.

[풀이]

(1) t 를 소거하면

$$\begin{aligned} y &= (x-1) - (x-1)^2 \\ &= -x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

$$= -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

이다. 한편, $t \geq 0$ 이므로 $x \geq 1$ 이다.

따라서, 점 P 의 자취는 그림 2.28-1과 같다.

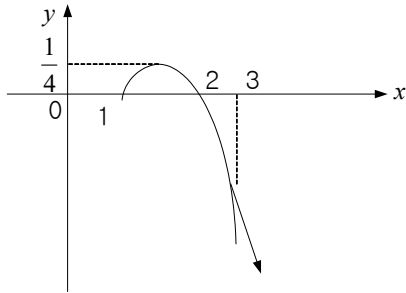


그림 2.28-1 점 P 의 자취

(2) $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 1 - 2t$ 이므로 $t = 3$ 일 때 $\vec{v} = (1, -5)$ 이다.

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -2$ 이므로 $t = 3$ 일 때 $\vec{a} = (0, -2)$ 이다.

(3) $\vec{v} = (1, -5)$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

이므로 $\theta = -\tan^{-1} \frac{1}{5}$ 이다.

[2.29] 다음 함수들의 극값을 구하여라.

(1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

(2) $f(x) = -x^4 + 2x^2$

(3) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(4) $f(x) = e^{-x} \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

(5) $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$

[풀이]

(1) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, $f''(x) = 12x - 18$ 이다.

$f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $6(x^2 - 3x + 2) = 0$ 에서 $x = 1$, $x = 2$ 이다.

$f''(1) = -6 < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = 6$ 이다.

$f''(2) = 6 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이고 극소값은 $f(2) = 5$ 이다.

(2) $f'(x) = -4x^3 + 4x$, $f''(x) = -12x^2 + 4$ 이다.

$f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $-4x(x^2 - 1) = 0$ 에서 $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ 이다.

$f''(-1) = -8 < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(-1) = 1$ 이다.

$f''(0) = 4 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극소값은 $f(0) = 0$ 이다.

$f''(1) = -8 < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = 1$ 이다.

$$(3) f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-1)e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x},$$

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2) \times (-1)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} \text{ 이다.}$$

$$f'(x) = 0 \text{으로 하는 } x \text{는 } x=0, x=2 \text{이다.}$$

$f''(0) = 2 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극소값은 $f(0) = 0$ 이다.

$f''(2) = -2e^{-2} < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이고 극대값은 $f(2) = 4e^{-2}$ 이다.

$$(4) f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(-\sin x + \cos x),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x) \\ &= -2e^{-x}\cos x \end{aligned}$$

이다.

$$f'(x) = 0 \text{으로 하는 } x \text{는 } \sin x - \cos x = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \text{이다.}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4} < 0 \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4} \text{에서 극대이고 극대값은}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} \text{이다.}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{5\pi}{4}}\cos\frac{5\pi}{4} > 0 \text{이므로 } x = \frac{5\pi}{4} \text{에서 극소이고 극소값은}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}} \text{이다.}$$

$$(5) f'(x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) = -2e^{-x}\sin x,$$

$$f''(x) = -2(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) = 2e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

이다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $\sin x = 0$ 에서 $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ 이다.

$f''(0) = -2 < 0$ 이므로 $x=0$ 에서 극대이고 극대값은 $f(0) = 1$ 이다.

$f''(\pi) = 2e^{-\pi} > 0$ 이므로 $x=\pi$ 에서 극소이고 극소값은 $f(\pi) = -e^{-\pi}$ 이다.

$f''(2\pi) = -2e^{-2\pi} < 0$ 이므로 $x=2\pi$ 에서 극대이고 극대값은 $f(2\pi) = e^{-2\pi}$ 이다.

[2.30] 다음 함수들의 극대값, 극소값, 최대값, 최소값을 구하여라.

$$(1) f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \quad (1 \leq x \leq 4)$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \qquad (3) f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

[풀이]

$$(1) f'(x) = 6x^2 - 18x + 12, f''(x) = 12x - 18 \text{이다.}$$

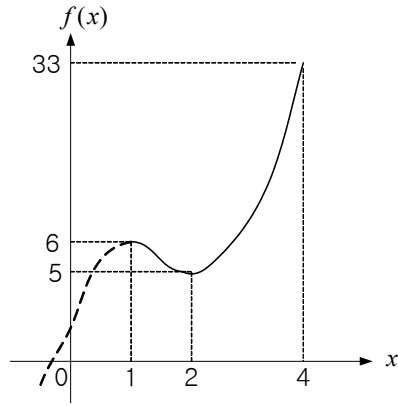
$$f'(x) = 0 \text{으로 하는 } x \text{는 } 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \text{에서 } x = 1, x = 2 \text{이다.}$$

$f''(1) = -6 < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = 6$ 이다.

$f''(2) = 6 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극소값은 $f(2) = 5$ 이다.

$f(4) = 128 - 144 + 48 + 1 = 33$ 이다.

따라서, 최대값은 33이고, 최소값은 극소값과 같은 5이며, 그래프는 그림p2.30a와 같다.



그림p2.30a

$$(2) \quad f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $1 - x^2 = 0$ 에서 $x = 1$, $x = -1$ 이다.

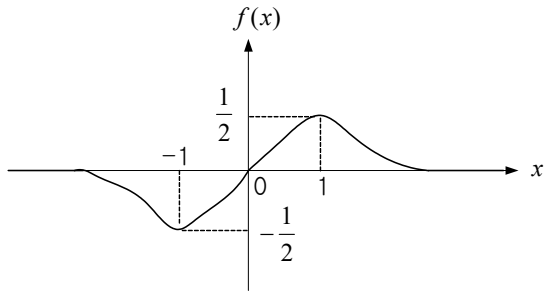
$f''(1) = \frac{-4}{2^3} < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = \frac{1}{2}$ 이다.

$f''(-1) = \frac{4}{2^3} > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이고 극소값은 $f(-1) = -\frac{1}{2}$ 이다.

$f(+\infty) = 0$, $f(-\infty) = 0$ 이므로 최대값은 극대값과 같은 $\frac{1}{2}$ 이며, 최소값은 극소값

과 같은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

그래프는 그림p2.30b와 같다.



그림p2.30b

$$(3) \quad f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x+1)^3(-1) - (1-x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} \\ &= \frac{-(x+1) - 3(1-x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2x-4}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

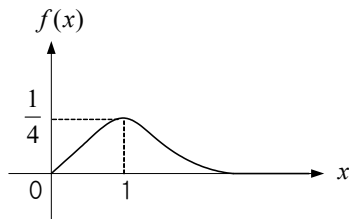
$f'(x) = 0$ 으로 하는 x 는 $1-x=0$ 에서 $x=1$ 이다.

$f''(1) = \frac{-2}{2^4} < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(1) = \frac{1}{4}$ 이다.

극소값은 존재하지 않는다.

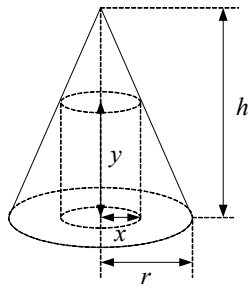
$f(0) = 0$, $f(+\infty) = 0$ 이므로 최대값은 극대값과 같은 $\frac{1}{4}$ 이며, 최소값은 0이다.

그래프는 그림p2.30c와 같다.



그림p2.30c

[2.31] 그림p2.31과 같이, 밑면의 반지름이 r , 높이가 h 인 원뿔에 내접하면서 부피가 가장 큰 원기둥의 반지름 x 와 높이 y 를 구하여라.



그림p2.31

[풀이] 원기둥의 부피 V 는

$$V = \pi x^2 y \quad \text{-----} \quad ①$$

이고, 그림p2.31에서

$$\frac{x}{r} = \frac{h-y}{h}$$

즉,

$$y = h - \frac{h}{r} x \quad \text{-----} \quad ②$$

이다. 식②를 식①에 대입하면

$$V = \pi h \left(x^2 - \frac{1}{r} x^3 \right) \quad \text{-----} \quad ③$$

이다. 식③으로부터,

$$\frac{dV}{dx} = \pi h \left(2x - \frac{3}{r} x^2 \right) \quad \text{-----} \quad ④$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \pi h \left(2 - \frac{6}{r} x \right) \quad \text{-----} \quad ⑤$$

이다. $\frac{dV}{dx} = 0$ 으로 하는 x 중 $x > 0$ 인 것은

$$x = \frac{2}{3} r \quad \text{-----} \quad ⑥$$

이고, $\frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=\frac{2}{3}r} = -2\pi h < 0$ 이므로 식⑥의 x 은 부피를 최대화 하는 값이다.

식⑥을 식②에 대입하고 정리하면

$$y = \frac{1}{3} h \quad \text{-----} \quad ⑦$$

이다.

<< 2.6 적분 >>

[2.32] 다음 부정적분을 구하여라.

$$(1) \int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (2) \int (1 + 2\sqrt{x})^2 dx$$

$$(3) \int (3e^x - 2e^{-x}) dx \quad (4) \int (2x - \sin x + 2 \cos x) dx$$

[풀이]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 + 2x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\
 &= \frac{1}{3} x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int (1 + 2\sqrt{x})^2 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 4x) dx \\
 &= x + 4 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 4 \frac{x^2}{2} + C \\
 &= x + \frac{8}{3} x\sqrt{x} + 2x^2 + C
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int (3e^x - 2e^{-x}) dx = 3e^x + 2e^{-x} + C$$

$$(4) \quad \int (2x - \sin x + 2 \cos x) dx = x^2 + \cos x + 2 \sin x + C$$

[2.33] 다음 부정적분을 구하여라.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \int (4x-3)^4 dx & (2) \quad \int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx \\
 (3) \quad \int \frac{2x}{x^2+4} dx & (4) \quad \int (x^2+3x+3)^3 (2x+3) dx \\
 (5) \quad \int e^{-2x+3} dx & (6) \quad \int (\sin x + \cos x)^2 dx \\
 (7) \quad \int \sin^2 x dx & (8) \quad \int \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx
 \end{array}$$

[풀이]

(1) $4x-3 = u$ 로 놓으면 $4dx = du$ 이다. 따라서,

$$\int (4x-3)^4 dx = \int u^4 \frac{du}{4} = \frac{1}{20} u^5 + C = \frac{1}{20} (4x-3)^5 + C$$

이다.

(2) $2x+3 = u$ 로 놓으면 $2dx = du$ 이다. 따라서,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2} = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+3} + C$$

이다.

(3) $\frac{d(x^2+4)}{dx} = 2x$ 이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln|x^2+4| + C$$

이다.

(4) $x^2 + 3x + 3 = u$ 로 놓으면 $(2x+3)dx = du$ 이다. 따라서,

$$\int (x^2 + 3x + 3)^3 (2x+3) dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = (x^2 + 3x + 3)^4 + C$$

이다.

(5) $-2x + 3 = u$ 로 놓으면 $-2 dx = du$ 이다. 따라서,

$$\int e^{-2x+3} dx = \int e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-2x+3} + C$$

이다.

(6) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (1 + 2\sin x \cos x) dx = \int (1 + \sin 2x) dx$

$$= x - \frac{1}{2} \cos 2x + C \text{ 이다.}$$

(7) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

(8) $\int \cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) dx = \int \frac{1 + \cos(4x + \frac{2\pi}{3})}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin(4x + \frac{2\pi}{3}) + C$

[2.34] 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x e^{4x+2} dx$

(2) $\int x e^{-4x-2} dx$

(3) $\int x \cos 2x dx$

(4) $\int x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx$

[풀이]

(1) $u' = e^{4x+2}$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \frac{e^{4x+2}}{4}$, $v' = 1$ 이므로

$$\int x e^{4x+2} dx = x \frac{e^{4x+2}}{4} - \int \frac{e^{4x+2}}{4} 1 dx = \frac{1}{4} x e^{4x+2} - \frac{1}{16} e^{4x+2} + C$$

이다.

(2) $u' = e^{-4x-2}$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \frac{e^{-4x-2}}{-4}$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x e^{-4x-2} dx &= x \frac{e^{-4x-2}}{-4} - \int \frac{e^{-4x-2}}{-4} 1 dx \\ &= -\frac{1}{4} x e^{-4x-2} - \frac{1}{16} e^{-4x-2} + C \end{aligned}$$

이다.

(3) $u' = \cos 2x$, $v = x$ 라 놓으면 $u = \frac{\sin 2x}{2}$, $v' = 1$ 이므로

$$\int x \cos 2x dx = x \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} 1 dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

이다.

$$(4) \quad u' = \sin(2x + \frac{\pi}{6}), \quad v = x \text{라 놓으면} \quad u = \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2}, \quad v' = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx &= x \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2} - \int \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2} 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + C \end{aligned}$$

이다.

[2.35] $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 와 $f(x)$ 의 초기조건이 주어지 있을 때, 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$(1) \quad f'(x) = 4x^2 + 6 \text{이고} \quad f(0) = 8 \qquad (2) \quad f'(x) = 2e^{-2x} \text{이고} \quad f(0) = 4$$

$$(3) \quad f'(x) = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{6}) \text{이고} \quad f(0) = 2 \qquad (4) \quad f'(x) = xe^{-2x} \text{이고} \quad f(0) = 1$$

[풀이]

$$(1) \quad f(x) = \int (4x^2 + 6) dx = \frac{4}{3} x^3 + 6x + C \text{이고} \quad f(0) = 8 \text{이므로} \quad C = 8 \text{이다.}$$

$$\text{따라서, } f(x) = \frac{4}{3} x^3 + 6x + 8 \text{이다.}$$

$$(2) \quad f(x) = \int 2e^{-2x} dx + C = 2 \frac{e^{-2x}}{-2} + C = -e^{-2x} + C \text{이고} \quad f(0) = 4 \text{이므로}$$

$$-1 + C = 4 \text{에서} \quad C = 5 \text{이다. 따라서, } f(x) = -e^{-2x} + 5 \text{이다.}$$

$$(3) \quad f(x) = \int 2 \cos(2x + \frac{\pi}{6}) dx + C = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + C \text{이고} \quad f(0) = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} + C = 2 \text{에서} \quad C = \frac{3}{2} \text{이다. 따라서, } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{3}{2} \text{이다.}$$

$$(4) \quad f(x) = \int xe^{-2x} dx + C \text{이다.}$$

$$u' = e^{-2x}, \quad v = x \text{라 놓으면} \quad u = \frac{e^{-2x}}{-2}, \quad v' = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-2x} dx &= x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\text{이다. 따라서, } f(x) = -\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \text{이고} \quad f(0) = 1 \text{이므로} \quad -\frac{1}{4} + C = 1$$

$$\text{이다. 따라서, } f(x) = -\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{5}{4} \text{이다.}$$

[2.36] 다음 물음에 답하여라.

- (1) $f(t) = 20 \sin \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $\int_0^T f(t) dt$ 는 얼마인가?
- (2) $f(t) = 20 \cos \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $\int_0^T f(t) dt$ 는 얼마인가?
- (3) $f(t) = 20 \sin(\omega t + \Theta)$ 의 주기를 T 라고 할 때, $\int_0^T f(t) dt$ 는 얼마인가?
- (4) $f(t) = 20 \cos(\omega t + \Theta)$ 의 주기를 T 라고 할 때, $\int_0^T f(t) dt$ 는 얼마인가?
- (5) $f(t) = 20 \sin \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $g(t) = 20 \sin 10\omega t$ 의 주기는 얼마인가? $\int_0^T g(t) dt$ 는 얼마인가?
- (6) $f(t) = 20 \cos \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $g(t) = 20 \cos 10\omega t$ 의 주기는 얼마인가? $\int_0^T g(t) dt$ 는 얼마인가?

[풀이]

- (1) sine 함수의 한 주기동안의 정적분은 0이다. 이유는 다음과 같다.

$$\int_0^T f(t) dt = \left[20 \frac{\cos \omega t}{-\omega} \right]_0^T = -\frac{20}{\omega} (\cos \omega T - \cos 0) = -\frac{20}{\omega} (1 - 1) = 0$$

- (2) cosine 함수의 한 주기동안의 정적분은 0이다. 이유는 다음과 같다.

$$\int_0^T f(t) dt = \left[20 \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^T = \frac{20}{\omega} (\sin \omega T - \sin 0) = \frac{20}{\omega} (0 - 0) = 0$$

- (3) $f(t) = 20 \sin(\omega t + \Theta)$ 일 때, $\int_0^T f(t) dt = 0$ 이다.

- (4) $f(t) = 20 \cos(\omega t + \Theta)$ 일 때, $\int_0^T f(t) dt = 0$ 이다.

- (5) $f(t) = 20 \sin \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $g(t) = 20 \sin 10\omega t$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{10\omega} = \frac{T}{10}$ 이다.

$$T \text{는 } 10 \text{주기 동안의 시간이므로 } \int_0^T g(t) dt = 0 \text{이다.}$$

- (6) $f(t) = 20 \cos \omega t$ 의 주기를 T 라고 할 때, $g(t) = 20 \cos 10\omega t$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{10\omega} = \frac{T}{10}$ 이다.

$$T \text{는 } 10 \text{주기 동안의 시간이므로 } \int_0^T g(t) dt = 0 \text{이다.}$$

[2.37] 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_{-1}^{+1} (8x^3 + 3x^2 + 2) dx \quad (2) \int_0^1 (3\sqrt{2x+4} + 2) dx$$

$$(3) \int_0^1 4e^{-2x+1} dx \quad (4) \int_0^\infty 4e^{-2x} dx$$

$$(5) \int_0^{2\pi} \cos(2x + \frac{\pi}{6}) dx$$

$$(6) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$$

[풀이]

$$(1) \int_{-1}^{+1} (8x^3 + 3x^2 + 2) dx = [2x^4 + x^3 + 2x]_{-1}^{+1} = 5 - (2 - 1 - 2) = 6$$

$$(2) \int_0^1 (3\sqrt{2x+4} + 2) dx = [3 \frac{(2x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1} \times \frac{1}{2} + 2x]_0^1$$

$$= (6^{\frac{3}{2}} + 2) - 4^{\frac{3}{2}}$$

$$= 6\sqrt{6} - 6$$

$$(3) \int_0^1 4e^{-2x+1} dx = [4 \frac{e^{-2x+1}}{-2}]_0^1 = -2(e^{-1} - e)$$

$$(4) \int_0^\infty 4e^{-2x} dx = [4 \frac{e^{-2x}}{-2}]_0^\infty = -2(e^{-\infty} - 1) = 2$$

$$(5) \int_0^{2\pi} \cos(2x + \frac{\pi}{6}) dx = [\frac{\sin(2x + \frac{\pi}{6})}{2}]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$(6) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2} \times (2\pi - 0) = \pi$$

[2.38] 치환적분법으로 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_0^2 (x^2 + 2)^2 x dx$$

$$(2) \int_0^2 e^{-x^2+2} x dx$$

[풀이]

(1) $x^2 + 2 = t$ 로 놓으면, $2x dx = dt$ 이고, x 의 적분구간이 $[0, 2]$ 일 때 t 의 적분구간은 $[2, 6]$ 이므로

$$\int_0^2 (x^2 + 2)^2 dx = \int_2^6 t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} [\frac{t^3}{3}]_2^6 = \frac{1}{6} (36 \times 6 - 4 \times 2) = \frac{104}{3}$$

이다.

(2) $-x^2 + 2 = t$ 로 놓으면, $-2 dx = dt$ 이고, x 의 적분구간이 $[0, 2]$ 일 때 t 의 적분구간은 $[2, -2]$ 이므로

$$\int_0^2 e^{-x^2+2} x dx = \int_2^{-2} e^t \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} [e^t]_2^{-2} = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2})$$

이다.

[2.39] 다음 정적분을 구하여라.

$$(1) \int_0^2 x e^{-2x+1} dx$$

$$(2) \int_0^\infty x e^{-2x+1} dx$$

$$(3) \int_0^{\pi} x \cos 2x dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx$$

[풀이]

$$(1) u' = e^{-2x}, v = x \text{라 놓으면 } u = \frac{e^{-2x}}{-2}, v' = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{-2x} dx &= \left[x \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{-2} 1 dx \\ &= -\frac{1}{2}(2e^{-4} - 0) + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^2 \\ &= -e^{-4} - \frac{1}{4}(e^{-4} - e^0) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4} \end{aligned}$$

이다.

$$(2) u' = e^{-2x+1}, v = x \text{라 놓으면 } u = \frac{e^{-2x+1}}{-2}, v' = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-2x+1} dx &= \left[x \frac{e^{-2x+1}}{-2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x+1}}{-2} 1 dx \\ &= -\frac{1}{2}(0 - 0) + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2x+1}}{-2} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{4}(0 - e) \\ &= \frac{e}{4} \end{aligned}$$

이다.

$$(3) u' = \cos 2x, v = x \text{라 놓으면 } u = \frac{\sin 2x}{2}, v' = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx &= \left[x \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} 1 dx \\ &= \frac{1}{2}(0 - 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos 2x}{-2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{4}(1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다.

$$(4) u' = \sin(2x + \frac{\pi}{6}), v = x \text{라 놓으면 } u = \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2}, v' = 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx = \left[x \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{-2} 1 dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 0 \right\} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4} \left\{ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{6} \right\} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

이다.

[2.40] 다음 정적분으로 표현된 함수들을 x 에 관하여 미분하여라.

$$(1) \ y = \int_1^x e^{2t+1} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) dt \qquad (2) \ y = \int_x^5 e^{-2t} \cos 2t dt$$

[풀이]

$$(1) \ \frac{dy}{dx} = e^{2x+1} \cos(2\pi x + \frac{\pi}{3})$$

$$(2) \ y = \int_x^5 e^{-2t} \cos 2t dt = - \int_5^x e^{-2t} \cos 2t dt \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-2x} \cos 2x$$

이다.

[2.41] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 등식을 만족시킬 때, 상수 a 의 값과 $f(x)$ 를 구하여라.

$$(1) \ \int_a^x f(t) dt = x^2 - 4x + 3 \qquad (2) \ \int_x^1 f(t) dt = x^2 + 5x + a$$

[풀이]

(1) 주어진 식에 $x=a$ 를 대입하면,

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

이다. $(a-1)(a-3) = 0$ 에서 $a=1$, $a=3$ 이다.

주어진 식의 양변을 x 로 미분하면,

$$f(x) = 2x - 4$$

이다.

(2) 주어진 식에 $x=1$ 을 대입하면,

$$1 + 5 + a = 0$$

이다. 따라서, $a = -6$ 이다.

$$\int_x^1 f(t) dt = - \int_1^x f(x) dx \text{ 이므로}$$

$$\int_1^x f(x) dx = -x^2 - 5x - a$$

이고, 이 식의 양변을 x 로 미분하면,

$$f(x) = -2x - 5$$

이다.

<< 2.7 미분방정식 >>

[2.42] 미분방정식 $y'(t) + 2y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 4$ 일 때의 해를 구하여라.

[풀이]

$y'(t) + 2y(t) = 0$ 의 일반해는

$$y(x) = Ce^{-2x}$$

이고, $y(0) = 4$ 일 때의 해는

$$4 = C$$

이므로 $y(t) = 4e^{-2t}$ 이다.

[2.43] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

(1) $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해

(2) $y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해

(3) $y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해

(4) $y''(t) + 16y(t) = 0$ 의 일반해와 초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해

[풀이]

(1) 특성방정식은 $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = -2C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-2t}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 + C_2 = 1$$

$y'(0) = 2$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$-2C_1 - 4C_2 = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $C_2 = -2$, $C_1 = 3$ 이므로 해는

$$y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

이다.

(2) 특성방정식은 $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -3 + j2$, $\lambda_2 = -3 - j2$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = e^{-3t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$$

이다.

초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = e^{-3t}\{(-3A + 2B)\cos 2t - (2A + 3B)\sin 2t\}$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터

$$A = 1$$

를 얻고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-3A + 2B = 1$$

를 얻는다. 즉, $A = 1$, $B = 2$ 이다. 따라서, 해는

$$y(t) = e^{-3t}(\cos 2t + 2 \sin 2t)$$

이다.

(3) 특성방정식은 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-4t}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = (C_2 - 4C_1 - 4C_2 t)e^{-4t}$$

이다. $y(0) = 2$ 로부터 다음의 식을 얻고,

$$C_1 = 2$$

$y'(0) = 1$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$C_2 - 4C_1 = 1$$

위의 식들로부터 $C_1 = 2$, $C_2 = 9$ 이므로 해는

$$y(t) = (2 + 9t)e^{-4t}$$

이다.

(4) 특성방정식은 $\lambda^2 + 16 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = +j4$, $\lambda_2 = -j4$ 이므로 주어진 미분방정식의 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = A \cos 4t + B \sin 4t$$

이다.

초기치가 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자. 앞의 식으로부터

$$y'(t) = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t$$

이다. $y(0) = 1$ 로부터

$$A = \frac{1}{4}$$

를 얻고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$B = \frac{1}{4}$$

를 얻는다. 따라서, 해는

$$y(t) = \frac{1}{4} (\cos 4t + \sin 4t)$$

이다.

[2.44] 다음 미분방정식의 일반해와 주어진 초기치를 만족하는 해를 구하여라.

$$(1) \quad y'(t) + 3y(t) = 6 + 3e^{-2t}, \quad y(0) = 0$$

$$(2) \quad y'(t) + 3y(t) = 3t + 6e^{-3t}, \quad y(0) = 0$$

$$(3) \quad y'(t) + 3y(t) = 6 + 3\sin 2t, \quad y(0) = 0$$

$$(4) \quad y'(t) + 3y(t) = 3 + 6\cos 2t, \quad y(0) = 0$$

[풀이]

(1) $y'(t) + 3y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-3t}$ 이고,

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + De^{-2t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2De^{-2t}$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$3K_0 + De^{-2t} = 6 + 3e^{-2t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$K_0 = 2,$$

$$D = 3$$

이다. 따라서,

$$y_p(t) = 2 + 3e^{-2t}$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-3t} + 2 + 3e^{-2t} \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 0$ 일 때,

$$C + 2 + 3 = 0$$

이므로 $C = -5$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 0$ 일 때의 해는

$$y(t) = -5e^{-3t} + 2 + 3e^{-2t}$$

이다.

(2) $y'(t) + 3y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-3t}$ 이고,

$x(t)$ 의 두 번째 항인 $6e^{-3t}$ 는 제차미분방정식의 해이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1 t + K_0 + Dte^{-3t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = K_1 + De^{-3t} - 3Dte^{-3t}$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$(K_1 + 3K_0) + 3K_1 t + De^{-3t} = 3t + 6e^{-3t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$K_1 + 3K_0 = 0,$$

$$3K_1 = 3,$$

$$D = 6$$

이다. 즉, $K_1 = 1$, $K_0 = -\frac{1}{3}$, $D = 6$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = t - \frac{1}{3} + 6te^{-3t}$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-3t} + t - \frac{1}{3} + 6te^{-3t} \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 0$ 일 때,

$$C - \frac{1}{3} = 0$$

이므로 $C = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 0$ 일 때의 해는

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + t - \frac{1}{3} + 6te^{-3t}$$

이다.

(3) $y'(t) + 3y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-3t}$ 이고,

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + A \cos 2t + B \sin 2t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$3K_0 + (-2A + 3B) \sin 2t + (2B + 3A) \cos 2t = 6 + 3 \sin 2t$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$3K_0 = 6,$$

$$-2A + 3B = 3,$$

$$3A + 2B = 0$$

이고, 위의 식들을 풀면 $A = -\frac{6}{13}$, $B = \frac{9}{13}$, $K_0 = 2$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 2 - \frac{6}{13} \cos 2t + \frac{9}{13} \sin 2t$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-3t} + 2 - \frac{6}{13} \cos 2t + \frac{9}{13} \sin 2t \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 0$ 일 때,

$$C + 2 - \frac{6}{13} = 0$$

이므로 $C = -\frac{20}{13}$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 0$ 일 때의 해는

$$y(t) = -\frac{20}{13} e^{-3t} + 2 - \frac{6}{13} \cos 2t + \frac{9}{13} \sin 2t$$

이다.

(4) $y'(t) + 3y(t) = 0$ 의 일반해 $y_h(t)$ 는 $y_h(t) = Ce^{-3t}$ 이고,

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + A \cos 2t + B \sin 2t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

이고, $y_p(t)$ 와 $y_p'(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$3K_0 + (-2A + 3B) \sin 2t + (2B + 3A) \cos 2t = 3 + 6 \cos 2t$$

를 얻는다. 위의 식으로부터

$$3K_0 = 3,$$

$$-2A + 3B = 0,$$

$$3A + 2B = 6$$

이고, 위의 식들을 풀면 $A = \frac{18}{13}$, $B = \frac{12}{13}$, $K_0 = 1$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 1 + \frac{18}{13} \cos 2t + \frac{12}{13} \sin 2t$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= Ce^{-3t} + 1 + \frac{18}{13} \cos 2t + \frac{12}{13} \sin 2t \end{aligned}$$

이다.

초기치가 $y(0) = 0$ 일 때,

$$C + 1 + \frac{18}{13} = 0$$

이므로 $C = -\frac{31}{13}$ 이다. 따라서, 초기치가 $y(0) = 0$ 일 때의 해는

$$y(t) = -\frac{31}{13}e^{-3t} + 1 + \frac{18}{13}\cos 2t + \frac{12}{13}\sin 2t$$

이다.

[2.45] 다음 미분방정식의 일반해와 주어진 초기치를 만족하는 해를 구하여라.

$$(1) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6e^{-t} + 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(2) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 10\cos 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(3) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 10 + 16\sin 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$(4) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(5) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(6) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 2e^{-3t} + 9, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

[풀이]

(1) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ 이므로 제차 미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = De^{-t} + K_1t + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -De^{-t} + K_1,$$

$$y_p''(t) = De^{-t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$2De^{-t} + 6K_1t + (5K_1 + 6K_0) = 6e^{-t} + 3t$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$2D = 6,$$

$$6K_1 = 3,$$

$$5K_1 + 6K_0 = 0$$

이어야 하므로 $D=3$, $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_0 = -\frac{5}{12}$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 3e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{5}{12}$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + 3e^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{5}{12} \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - 3e^{-t} + \frac{1}{2}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + C_2 + 3 - \frac{5}{12} = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-2C_1 - 3C_2 - 3 + \frac{1}{2} = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_2 = \frac{5}{3}$, $C_1 = -\frac{17}{4}$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -\frac{17}{4}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t} + 3e^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{5}{12}$$

이다.

(2) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -1 + j1$, $\lambda_2 = -1 - j1$ 이므로 제차미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_1 \cos 2t + K_2 \sin 2t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -2K_1 \sin 2t + 2K_2 \cos 2t,$$

$$y_p''(t) = -4K_1 \cos 2t - 4K_2 \sin 2t$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$(-2K_1 + 4K_2) \cos 2t + (-4K_1 - 2K_2) \sin 2t = 10 \cos 2t$$

를 얻는다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$-2K_1 + 4K_2 = 10,$$

$$-4K_1 - 2K_2 = 0,$$

이어야 하므로 $K_1 = -1$, $K_2 = 2$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = -\cos 2t + 2\sin 2t$$

이다.

따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= e^{-t}(A \cos t + B \sin t) - \cos 2t + 2 \sin 2t$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = e^{-t}\{(-A+B)\cos t - (A+B)\sin t\} + 2\sin 2t + 4\cos 2t$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$A - 1 = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-A + B + 4 = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $A = 1$, $B = -2$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = e^{-t}(\cos t - 2 \sin t) - \cos 2t + 2 \sin 2t$$

이다.

(3) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 1 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = +j1$, $\lambda_2 = -j1$ 이므로 제차미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = A \cos t + B \sin t$$

이다.

$x(t)$ 의 어느 항도 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = K_0 + A \cos 3t + B \sin 3t$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -3A \sin 3t + 3B \cos 3t,$$

$$y_p''(t) = -9A \cos 3t - 9B \sin 3t$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$K_0 - 8A \cos 3t - 8B \sin 3t = 10 + 16 \sin 3t$$

를 얻는다. 위의 식으로부터, $K_0 = 10$, $A = 0$, $B = -2$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 10 - 2 \sin 3t$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= A \cos t + B \sin t + 10 - 2 \sin 3t$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = -A \sin t + B \cos t - 6 \cos 3t$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$A + 10 = 0$$

이고, $y'(0) = 2$ 로부터

$$B - 6 = 2$$

이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -10 \cos t + 8 \sin t + 10 - 2 \sin 3t$$

이다.

(4) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 이므로 제차미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}$$

이다.

$x(t)$ 는 제차미분방정식의 해가 아니므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = D e^{-t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = -D e^{-t},$$

$$y_p''(t) = D e^{-t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$D e^{-t} = 4 e^{-t}$$

를 얻는다. $D = 4$ 이므로

$$y_p(t) = 4 e^{-t}$$

이다. 따라서, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= (C_1 + C_2 t) e^{-2t} + 4 e^{-t} \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t) e^{-2t} - 4 e^{-t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + 4 = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$C_2 - 2C_1 - 4 = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_1 = -4$, $C_2 = -3$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = (-4 - 3t) e^{-2t} + 4 e^{-t}$$

이다.

(5) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ 이므로 제차 미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

이다.

$x(t)$ 가 제차미분방정식의 해이고 단근이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = Dte^{-2t}$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = (D - 2Dt)e^{-2t},$$

$$y_p''(t) = (-4D + 4Dt)e^{-2t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$De^{-2t} = 6e^{-2t}$$

를 얻는다. 위의 식으로부터 $D = 6$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = 6te^{-2t}$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + 6te^{-2t} \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = (-2C_1 + 6 - 12t)e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + C_2 = 0$$

이고, $y'(0) = 1$ 로부터

$$-2C_1 + 6 - 3C_2 = 1$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_2 = 5$, $C_1 = -5$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-3t} + 6te^{-2t}$$

이다.

(6) 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ 이고 근은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ 이므로 제차미분방정식의 일반해 $y_h(t)$ 는

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}$$

이다.

$x(t)$ 의 항이 제차미분방정식의 해이고 이중근이므로 특수해 $y_p(t)$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$y_p(t) = Dt^2 e^{-3t} + K_0$$

위의 식으로부터 $y_p'(t)$ 와 $y_p''(t)$ 는

$$y_p'(t) = (2Dt - 3Dt^2)e^{-3t},$$

$$y_p''(t) = (2D - 12Dt + 9Dt^2)e^{-3t}$$

이고, $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ 를 주어진 미분방정식에 대입하면

$$2De^{-3t} + 9K_0 = 2e^{-3t} + 9$$

를 얻는다. 위의 식으로부터 $D = 1$, $K_0 = 1$ 이다. 따라서,

$$y_p(t) = t^2e^{-3t} + 1$$

이고, 일반해 $y(t)$ 는

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= (C_1 + C_2t)e^{-3t} + t^2e^{-3t} + 1 \\ &= (C_1 + C_2t + t^2)e^{-3t} + 1 \end{aligned}$$

이다.

또한 초기치가 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ 일 때의 해를 구해보자.

$$y'(t) = (C_2 + 2t - 3C_1 - 3C_2t - 3t^2)e^{-3t}$$

이다. $y(0) = 0$ 로부터

$$C_1 + 1 = 0$$

이고, $y'(0) = 2$ 로부터

$$C_2 - 3C_1 = 2$$

이다. 위의 두 식을 풀면, $C_1 = -1$, $C_2 = -1$ 이다. 따라서, 주어진 초기치를 만족하는 해는

$$y(t) = (-1 - t + t^2)e^{-3t} + 1$$

이다.