[연습 문제]

<< 6.1 라플라스변환의 정의, 6.2 라플라스변환의 성질 >>

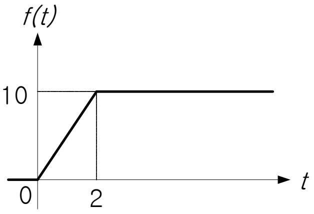
[6.1] 다음 함수들의 라플라스변환을 구하여라.

(1) $f(t) = \delta(t) + 2u_s(t) + 4tu_s(t) + e^{-3t}u_s(t)$

(2) $f(t) = te^{-2(t-2)}u_s(t-2) + 2u_s(t-3)$

(3) $f(t) = 2\cos t + e^{-2t}\cos t + 2\sin 2t + e^{-3t}\sin 2t\ ,\ \ t \geq 0$

(4)



[풀이]

[6.1] 라플라스변환의 성질에 의하여,

(1) $F(s) = L\{\delta(t)\} + 2L\{u_s(t)\} + 4L\{tu_s(t)\} + \{e^{-3t}u_s(t)\}$

$$= 1 + 2\times\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\Big|_{s=s+3}$$

$$= 1 + \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s+3}$$

(2) $f(t) = te^{-2(t-2)}u_s(t-2) + 2u_s(t-3)$

$$= (t-2)e^{-2(t-2)}u_s(t-2) + 2e^{-2(t-2)}u_s(t-2) + 2u_s(t-3)$$

이므로

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=s+2}e^{-2s} + 2\frac{1}{s}\Big|_{s=s+2}e^{-2s} + 2\frac{1}{s}e^{-3s}$$

$$= \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2} + \frac{2e^{-2s}}{s+2} + \frac{2e^{-3s}}{s}$$

이다.

(3) $F(s) = 2\dfrac{s}{s^2+1^2} + \dfrac{s+2}{(s+2)^2+1^2} + 2\dfrac{2}{s^2+2^2} + \dfrac{2}{(s+3)^2+2^2}$

(4) $f(t)$를 식으로 나타내면, $f(t) = \dfrac{10}{2}tu_s(t) - \dfrac{10}{2}(t-2)u_s(t-2)$이므로

$$F(s) = 5\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$$= \frac{5}{s^2}(1 - e^{-2s})$$

이다.

[6.2] 다음의 라플라스변환을 갖는 함수의 최기치와 최종치를 구하여라.

(1) $F(s) = \dfrac{s+10}{s(s+2)}$ (2) $F(s) = \dfrac{9}{s+3}$

[풀이]

[6.2]

(1) 최기치 정리에 의하여 초기치는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty} sF(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{s+10}{s+2} \\ &= 1\end{aligned}$$

이다.

$sF(s) = \dfrac{s+10}{s+2}$ 의 극점이 s평면의 좌반부에만 존재하므로 최종치정리를 적용할 수 있고, 최종치는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} sF(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s+10}{s+2} \\ &= 5\end{aligned}$$

이다.

(2) 최기치 정리에 의하여 초기치는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty} sF(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{9s}{s+3} \\ &= 9\end{aligned}$$

이다.

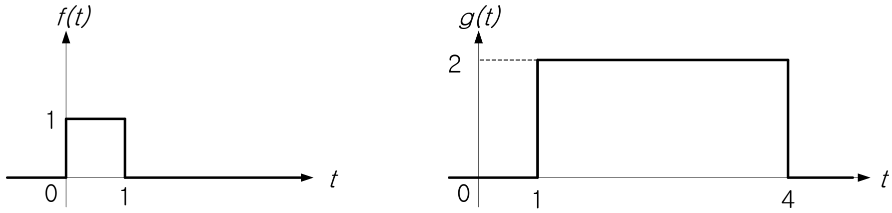
$sF(s) = \dfrac{9s}{s+3}$ 의 극점이 s평면의 좌반부에만 존재하므로 최종치정리를 적용할 수 있고, 최종치는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} sF(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{9s}{s+3} \\ &= 0\end{aligned}$$

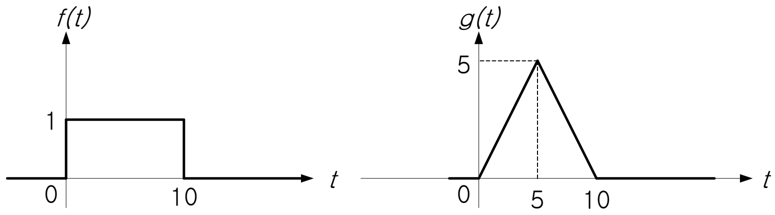
이다.

[6.3] 두 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 가 다음 그림p6.3과 같을 때, 두 함수의 합성적분 $f(t) * g(t)$ 를 구하여라.

(1)



(2)



(3)

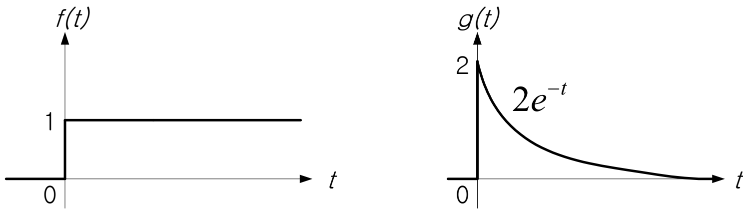


그림7.3 $f(t)$ 와 $g(t)$

[풀이]

[6.3]

(1) (과정1) 뒤집기 : $f(t)$ 로부터 $f(-\tau)$를 구하면 그림 s6.3(1)ab의 (a)와 같다.

(과정2) 이동 : $f(-\tau)$를 t만큼 이동시킨 $f(t-\tau)$를 그래프로 나타내면 그림 s6.3(1)ab의 (b)와 같다.

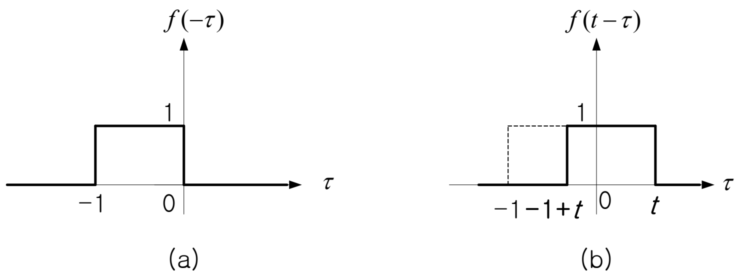


그림 s6.3(1)ab $f(-\tau)$와 $f(t-\tau)$의 그래프

(과정3) 적분 : 적분변수 t의 값에 따라 적분 구간 $[0, t]$에서 $f(t-\tau)\,g(\tau)$가 만드는 면적을 다음과 같이 구한다.

(i) $0 < t < 1$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(1)cd의 (c)와 같고,

$$f(t) * g(t) \ = \ 0$$

이다.

(ii) $1 \le t < 2$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(1)cd의 (d)와 같고,

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) \ &= \ \int_1^t 1 \times 2 \, d\tau \\ &= \ 2\,(t-1) \end{aligned}$$

이다.

(iii) $2 \le t < 4$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(1)cd의 (e)와 같고,

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) \ &= \ \int_{-1+t}^t 1 \times 2 \, d\tau \\ &= \ 2 \end{aligned}$$

이다.

(vi) $4 \le t < 5$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(1)cd의 (f)와 같고,

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) \ &= \ \int_{-1+t}^4 1 \times 2 \, d\tau \\ &= \ 2\,(5-t) \end{aligned}$$

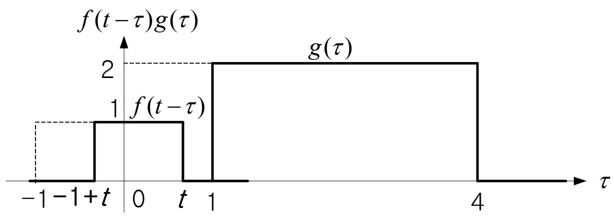
이다.

(v) $5 \le t$일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(1)cd의 (g)와 같고,

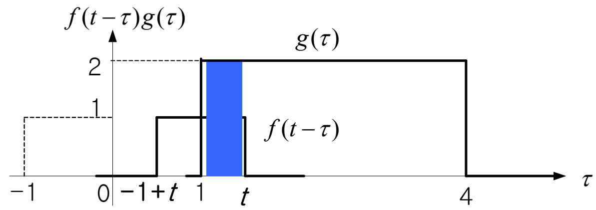
$$f(t) * g(t) \ = \ 0$$

이다.

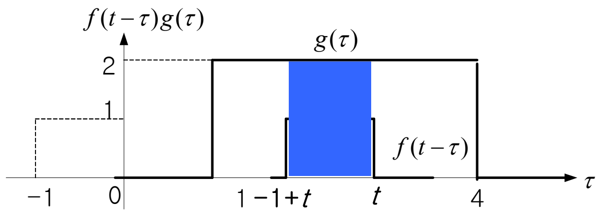
즉, $f(t) * g(t) \ = \ \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 2(t-1), & 1 \le t < 2 \\ 2, & 2 \le t < 4 \\ 2(5-t), & 4 \le t < 5 \\ 0, & 5 \le t \end{cases}$ 이다.



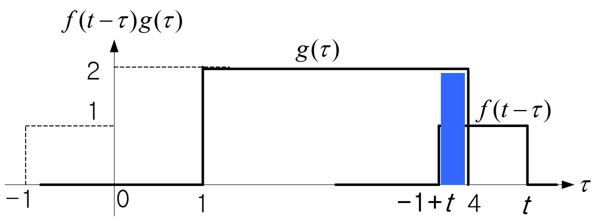
(c) $0 < t < 1$ 일 때



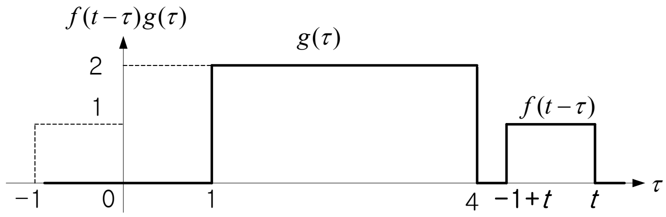
(d) $1 \le t \le 2$일 때



(d) $2 \le t \le 4$일 때



(d) $4 \le t \le 5$일 때



(g)

(g) $5 \le t$일 때

그림 s6.3(1)cd $f(t-\tau)g(t)$의 그래프

(2) (과정1) 뒤집기 : $f(t)$ 로부터 $f(-\tau)$를 구하면 그림 s6.3(2)ab의 (a)와 같다.

(과정2) 이동 : $f(-\tau)$를 t만큼 이동시킨 $f(t-\tau)$를 그래프로 나타내면 그림 s6.3(2)ab의 (b)와 같다.

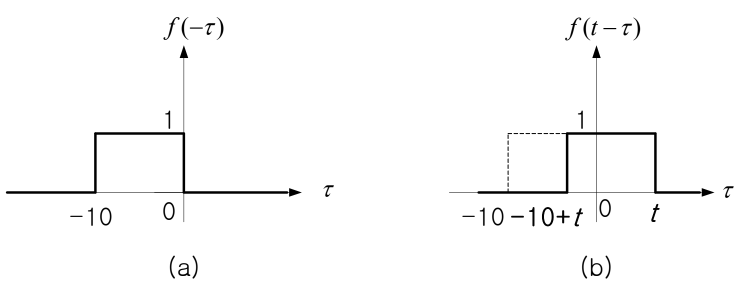


그림 s6.3(2)ab $f(-\tau)$와 $f(t-\tau)$의 그래프

(과정3) 적분 : 적분변수 t의 값에 따라 적분 구간 $[0, t]$에서 $f(t-\tau)g(\tau)$가 만드는 면적은 다음과 같이 구한다.

(i) $0 < t < 5$ 일 때 : $g(\tau) = \tau$ 이고 $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(2)cd 의 (c)와 같고,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t 1 \times \tau \, d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{2} \tau^2 \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2} t^2$$

이다.

(ii) $5 \le t < 10$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(2)cd의 (d)와 같고,

$$f(t) * g(t) = \int_0^5 1 \times \tau \, d\tau + \int_5^t (10 - \tau) \, d\tau$$

$$= 25 - \frac{1}{2}(10 - t) \times (10 - t)$$

$$= 25 - \frac{1}{2}(10 - t)^2$$

이다.

(iii) $10 \le t < 15$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(2)cd의 (e)와 같고,

$$f(t) * g(t) = \int_{-10+t}^5 1 \times \tau \, d\tau + \int_5^{10} (10 - \tau) \, d\tau$$

$$= 25 - \frac{1}{2}(-10 + t)^2$$

(iv) $15 \le t < 20$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(2)cd의 (f)와 같고,

$$f(t) * g(t) = \int_{-10+t}^{10} 1 \times (10 - \tau) \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}(20 - t)(20 - t)$$

$$= \frac{1}{2}(20 - t)^2$$

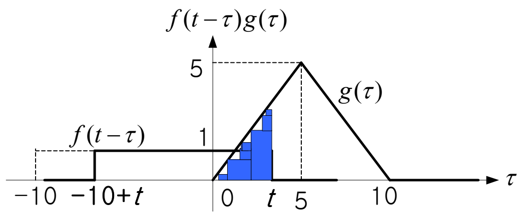
이다.

(v) $20 \le t$ 일 때 : $f(t-\tau)\,g(t)$ 의 그래프는 그림 s6.3(2)cd의 (g)와 같고,

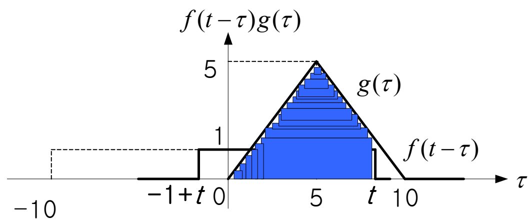
$$f(t) * g(t) = 0$$

이다.

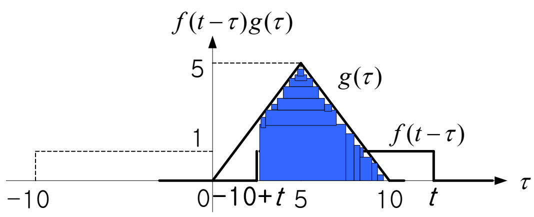
즉, $$f(t) * g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2, & 0 < t < 5 \\ 25 - \frac{1}{2}(t - 10)^2, & 5 \le t < 10 \\ 25 - \frac{1}{2}(t - 10)^2, & 10 \le t < 15 \\ \frac{1}{2}(t - 20^2, & 15 \le t < 20 \\ 0, & 20 \le t \end{cases}$$ 이다.



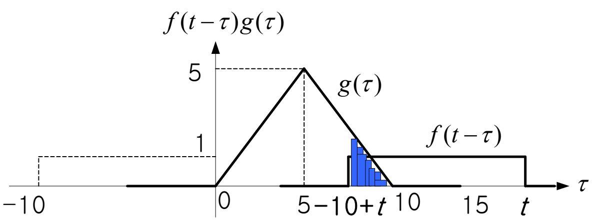
(c) $0 < t < 5$일 때



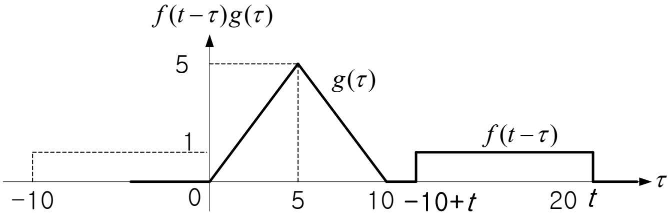
(d) $5 \le t \le 10$일 때



(e) $10 \le t \le 15$일 때



(f) $15 \le t \le 20$일 때



(g)

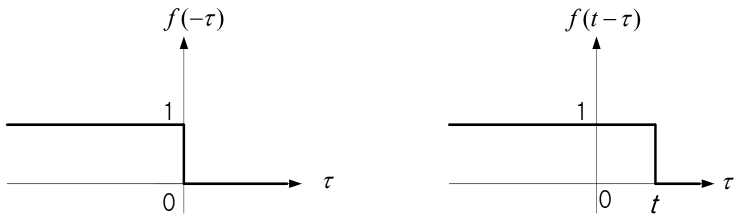
(g) $20 \le t$일 때

그림 s6.3(2)cd $f(t-\tau)g(t)$의 그래프

(3) (과정1) 뒤집기 : $f(t)$로부터 $f(-\tau)$를 구하면 그림 s6.3(3)ab의 (a)와 같고,

$g(\tau) = 2e^{-\tau}$이다.

(과정2) 이동 : $f(-\tau)$를 t만큼 이동시킨 $f(t-\tau)$를 그래프로 나타내면 그림 s6.3(3)ab의 (b)와 같다.



(a) (b)

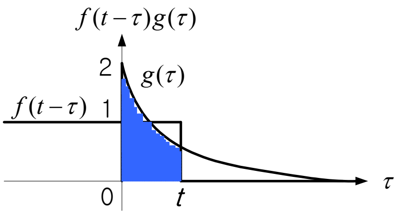
그림 s6.3(3)ab $f(-\tau)$와 $f(t-\tau)$의 그래프

(과정3) 적분 : 적분변수 t의 값에 따라 적분 구간 $[0, t]$에서 $f(t-\tau)g(\tau)$가 만드는 면적은 다음과 같다.

$0 < t$일 때 $f(t-\tau) = 1$, $g(\tau) = 2e^{-\tau}$이므로 $f(t-\tau)g(t)$의 그래프는 그림 s6.3(3)cd와 같고,

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= \int_0^t 1 \times 2e^{-\tau} d\tau \\
&= 2(1 - e^{-t})
\end{aligned}
$$

이다.



그림p6.3(3)cd

<< 6.3 역라플라스변환 >>

[6.4] 다음 $F(s)$의 역라플라스변환 $f(t)$를 구하여라.

(1) $F(s) = \dfrac{4}{s^2+2s}$ (2) $F(s) = \dfrac{s+4}{s(s+1)^2}$

(3) $F(s) = \dfrac{4}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$ (4) $F(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s^2+9)}$

(5) $F(s) = \dfrac{2e^{-5s}}{s(s+2)}$

[풀이]

[6.4]

(1) 먼저 $F(s)$를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{4}{s^2+2s} = \frac{4}{s(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2}$$

여기서,

$$k_1 = \{F(s)s\}|_{s=0} = \{\frac{4}{s+2}\}|_{s=0} = 2,$$

$$k_2 = \{F(s)(s+2)\}|_{s=-2} = \{\frac{4}{s}\}|_{s=-2} = -2$$

이다.

라플라스변환의 선형성에 의하여, $F(s)$의 역라플라스변환은 각항의 역라플라스변환과 같으므로

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{\frac{2}{s} + \frac{-2}{s+2}\} = L^{-1}\{\frac{2}{s}\} + L^{-1}\{\frac{-2}{s+2}\} = 2L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 2L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}$$

이고, 표7.2-2의 라플라스변환 쌍을 이용하면,

$$f(t) = 2 - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

또는

$$f(t) = \{2 - 2e^{-2t}\}u_s(t)$$

이다.

(2) 먼저 $F(s)$를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

$$= \frac{k_1}{s} + \frac{c_1}{(s+1)^2} + \frac{c_2}{s+1}$$

여기서,

$$k_1 = \{F(s)s\}|_{s=0}$$

$$= \{\frac{s+2}{(s+1)^2}\}|_{s=0}$$

$$= 2,$$

$$c_1 = \{F(s)(s+1)^2\}|_{s=-1}$$

$$= \{\frac{s+2}{s}\}|_{s=-1}$$

$$= -1,$$

$$c_2 = [\frac{d}{ds}\{F(s)(s+1)^2\}]|_{s=-1}$$

$$= [\frac{d}{ds}\{\frac{s+2}{s}\}]|_{s=-1}$$

$$= \{\frac{s-(s+2)}{s^2}\}|_{s=-1}$$

$$= -2$$

이다.

라플라스변환의 선형성과 표7.2-2의 라플라스변환 쌍을 이용하면,

$$f(t) = L^{-1}\{\frac{2}{s} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1}\}$$

$$= 2 - te^{-t} - 2e^{-t}, \ t \geq 0$$

또는

$$f(t) = (2 - te^{-t} - 2e^{-t})u_s(t)$$

이다.

(3) 먼저 $F(s)$를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{4}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{c_1 s + c_2}{(s+1)^2+1^2}$$

여기서,

$$k_1 = \{F(s)s\}|_{s=0}$$

$$= \{ \frac{4}{(s+1)(s^2+2s+2)} \}|_{s=0}$$

$$= 2$$

$$k_2 = \{ F(s)(s+1) \}|_{s=-1}$$

$$= \{ \frac{4}{s(s^2+2s+2)} \}|_{s=-1}$$

$$= -4$$

이고, $4 = k_1(s+1)(s^2+2s+2) + k_2 s(s^2+2s+2) + (c_1 s + c_2) s(s+1)$에서

$$2(s+1)(s^2+2s+2) - 4(s^3+2s^2+2s) + (c_1 s + c_2)(s^2+s) = 4,$$

$$(-2+c_1)s^3 + (-2+c_2+c_1)s^2 + c_2 s + 4 = 4$$

이다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$c_1 = 2,$$

$$c_2 = 0,$$

이어야 한다. 즉,

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-4}{s+1} + \frac{2s}{s^2+2s+2}$$

이고, 위의 식을 표7.2-2의 라플라스변환 쌍을 이용할 수 있도록 변형하면,

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2s}{(s+1)^2+1^2}$$

이다. 따라서,

$$f(t) = 2 - 4e^{-t} - 2e^{-t}\cos t, \quad t \geq 0$$

이다.

(4) 먼저 $F(s)$를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+9)}$$

$$= \frac{k_1}{s+1} + \frac{c_1 s + c_2}{s^2+9}$$

여기서,

$$k_1 = \{ F(s)(s+1) \}|_{s=-1}$$

$$= \{ \frac{10}{s^2+9} \}|_{s=-1}$$

$$= 1$$

이고,

$$10 = k_1(s^2+9) + (s+1)(c_1 s + c_2)$$에서

$$(1+c_1)s^2 + (c_1+c_2)s + 9 + c_2 = 10$$

이다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$c_1 = -1,$$

$$c_2 = 1$$

이어야 한다. 즉,

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+9}$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{-s+3\times\frac{1}{3}}{s^2+3^2}$$

이므로

$$f(t) = e^{-t} - \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\ ,\ \ t \geq 0$$

이다.

(5) $F_1(s) = \dfrac{2}{s(s+2)}$ 라고 하면, 라플라스변환의 성질에 의하여

$f(t) = f_1(t-5)\,u_s(t-5)$ 이다.

먼저 $F_1(s)$를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$F_1(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+2}$$

이다. 따라서, $f_1(t) = 1 - e^{-2t}\ ,\ \ t \geq 0$

이고,

$$f(t) = f_1(t-5)\,u_s(t-5)$$

$$= \{1 - e^{-2(t-5)}\}\,u_s(t-5)\ ,\ \ t \geq 0$$

이다.

<< 6.4 라플라스변환의 응용 >>

[6.5] 다음 선형 1차미분방정식의 해 $x(t),\ t \geq 0$를 라플라스변환을 이용하여 구하여라. 여기서, $u_s(t)$는 단위 계단함수이다.

(1) $\dfrac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 6u_s(t) + 3t,\ \ x(0) = 1$

(2) $\dfrac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 6e^{-3t},\ \ x(0) = 3$

(3) $\dfrac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 3\sin 3t,\ \ x(0) = 1$

[풀이]

[6.5] $L\{x(t)\} = X(s)$라고 하자.

(1) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면,

$$L\{\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)\} = L\{6u_s(t) + 3t\},\ \ x(0) = 1 \qquad \text{-------}\ ①$$

이고, 라플라스변환은 선형성이 있으므로 식①은 다음의 식②와 같다.

$$L\{\frac{dx(t)}{dt}\} + 3L\{x(t)\} = 6L\{u_s(t)\} + 3L\{t\}, \quad x(0) = 1 \quad \text{-------} ②$$

라플라스변환의 미분성질에 의하여 위의 식②는 다음과 같다.

$$sX(s) - x(0) + 3X(s) = 6\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s^2}$$

위의 식으로부터,

$$(s+3)X(s) = x(0) + \frac{6}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$= \frac{s^2 + 6s + 3}{s^2}$$

이다. 따라서,

$$X(s) = \frac{s^2 + 6s + 3}{s^2(s+3)} \quad \text{-------------------------} ③$$

이다.

역라플라스변환으로 $x(t)$를 구하기 위해 식③의 $X(s)$를 부분분수로 분해하여 전개하면,

$$X(s) = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+3} \quad \text{-----------------------} ④$$

이다. 식④에서,

$$k_1 = \{X(s)s^2\}|_{s=0}$$

$$= \frac{s^2 + 6s + 3}{s+3}|_{s=0}$$

$$= 1$$

이고,

$$k_2 = \{\frac{d}{ds}X(s)s^2\}|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{(s^2 + 6s + 3)}{s+3}|_{s=0}$$

$$= \frac{(s+3)(2s+6) - (s^2 + 6s + 3)}{(s+3)^2}|_{s=0}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$k_3 = \{X(s)(s+3)\}|_{s=-3}$$

$$= \frac{s^2 + 6s + 3}{s^2}|_{s=-3}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

이다.

표7.2-2의 라플라스변환 쌍을 이용하면,

$$x(t) = t + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

이다.

(2) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$sX(s) - x(0) \ + \ 3X(s) \ = \ 6\frac{1}{s+3}$$

위의 식으로부터,

$$\begin{aligned}(s+3)X(s) \ &= \ 3 + \frac{6}{s+3} \\ &= \ \frac{3s+15}{s+3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}X(s) \ &= \ \frac{3s+15}{(s+3)^2} \\ &= \ \frac{3(s+3)+6}{(s+3)^2} \\ &= \ \frac{3}{s+3} \ + \ \frac{6}{(s+3)^2}\end{aligned}$$

이다.

따라서, $x(t) \ = \ 3e^{-3t} \ + \ 6te^{-3t}$, $t \geq 0$ 이다.

(3) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$sX(s) - x(0) \ + \ 3X(s) \ = \ 3\frac{3}{s^2+3^2}$$

위의 식으로부터,

$$\begin{aligned}(s+3)X(s) \ &= \ 1 + \frac{9}{s^2+9} \\ &= \ \frac{s^2+18}{s^2+9}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}X(s) \ &= \ \frac{s^2+18}{(s+3)(s^2+3^2)} \\ &= \ \frac{k_1}{s+3} \ + \ \frac{c_1 s + c_2}{s^2+3^2}\end{aligned}$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned}k_1 \ &= \ \frac{s^2+18}{s^2+3^2}\Big|_{s=-3} \\ &= \ \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이고,

$$\frac{3}{2}(s^2+9) \ + \ (s+3)(c_1 s + c_2) \ = \ s^2+18 \ ,$$

$$(\frac{3}{2}+c_1)s^2 + (3c_1+c_2)s + \frac{27}{2}+3c_2 = s^2+18$$

이다. 위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$\frac{3}{2}+c_1 = 1,$$

$$3c_1+c_2 = 0,$$

$$\frac{27}{2}+3c_2 = 18$$

이어야 한다. 위의 세 식을 풀면,

$$c_1 = -\frac{1}{2},$$

$$c_2 = \frac{3}{2}$$

이다. 즉, $X(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$X(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}}{s^2+3^2}$$

이므로

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t, \quad t\geq 0$$

이다. 위의 $x(t)$를 더 간단히 하면,

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}(\sin 3t - \cos 3t)$$

$$= \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3t-\frac{\pi}{4}), \quad t\geq 0$$

이다.

[6.6] 다음 선형 2차미분방정식의 해 $x(t)$, $t\geq 0$를 라플라스변환을 이용하여 구하여라. 여기서, $u_s(t)$는 단위 계단함수이다.

(1) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 3\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = 3u_s(t)$, $v(0)=1$, $\dot{v}(0)=0$

(2) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 5\frac{dv(t)}{dt} + 6v(t) = 6\cos 3t u_s(t)$, $v(0)=\dot{v}(0)=0$

(3) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 6\frac{dv(t)}{dt} + 9v(t) = 3e^{-2t}u_s(t)$, $v(0)=1$, $\dot{v}(0)=1$

(4) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4v(t) = 2u_s(t)$, $v(0)=1$, $\dot{v}(0)=2$

(5) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 2\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = 2u_s(t)$, $v(0)=1$, $\dot{v}(0)=1$

[풀이]

[6.6] $L\{v(t)\} = V(s)$라고 하자.

(1) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{s^2V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)\} + 3\{sV(s) - v(0)\} + 2V(s) = \frac{3}{s}$$

위의 식으로부터,

$$\begin{aligned}(s^2 + 3s + 2)V(s) &= sv(0) + \dot{v}(0) + 3v(0) + \frac{3}{s} \\ &= s\times 1 + 0 + 3\times 1 + \frac{3}{s} \\ &= \frac{s^2 + 3s + 3}{s}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}V(s) &= \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ &= \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}\end{aligned}$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} \\ &= \frac{3}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2 &= \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_3 &= \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s+1)}\Big|_{s=-2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. 즉, $V(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$V(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

이다. 따라서,

$$v(t) = \frac{3}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

이다.

(2) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{s^2V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)\} + 5\{sV(s) - v(0)\} + 6V(s) = 6\times\frac{s}{s^2 + 3^2}$$

위의 식으로부터,

$$(s^2+5s+6)\,V(s) \;=\; sv(0)+\dot{v}(0)+5v(0)+\frac{6s}{s^2+3^2}$$
$$=\;\frac{6s}{s^2+3^2}$$

이므로

$$V(s) \;=\; \frac{6s}{(s^2+5s+6)(s^2+3^2)}$$
$$=\;\frac{6s}{(s+2)(s+3)(s^2+3^2)}$$
$$=\;\frac{k_1}{s+2}\;+\;\frac{k_2}{s+3}\;+\;\frac{c_1s+c_2}{s^2+3^2}$$

이다. 여기서,

$$k_1 \;=\; \frac{6s}{(s+3)(s^2+3^2)}\Big|_{s=-2}$$
$$=\;-\frac{12}{13},$$
$$k_2 \;=\; \frac{6s}{(s+2)(s^2+3^2)}\Big|_{s=-3}$$
$$=\;1,$$

이고, c_1과 c_2는 다음의 식으로부터 구한다.

$$6s \;=\; -\frac{12}{13}(s+3)(s^2+9)+1\times(s+2)(s^2+9)+(s+2)(s+3)(c_1s+c_2)$$
$$=\;\left(-\frac{12}{13}+1+c_1\right)s^3\;+\;\left(-\frac{36}{13}+2+c_2+5c_1\right)s^2$$
$$+\;\left(-\frac{108}{13}+9+6c_1+5c_2\right)s\;+\;\left(-\frac{12}{13}\times3\times9+18+6c_2\right)$$

위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$-\frac{12}{13}+1+c_1 \;=\; 0,$$
$$-\frac{36}{13}+2+c_2+5c_1 \;=\; 0,$$
$$-\frac{108}{13}+9+6c_1+5c_2 \;=\; 6,$$
$$-\frac{12}{13}\times3\times9+18+6c_2 \;=\; 0$$

이어야 하고, 위의 식에서,

$$c_1 = -\frac{1}{13}$$
$$c_2 \;=\; \frac{15}{13}$$

이다. 즉, $V(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$V(s) = \frac{-\frac{12}{13}}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \frac{-\frac{1}{13}s + \frac{15}{13}}{s^2+3^2}$$

이다. 따라서,

$$v(t) = -\frac{12}{13}e^{-2t} + e^{-3t} - \frac{1}{13}\cos 3t + \frac{5}{13}\sin 3t\,, \quad t \geq 0$$

$$= -\frac{12}{13}e^{-2t} + e^{-3t} + \frac{1}{13}(5\sin 3t - \cos 3t)\,, \quad t \geq 0$$

이다.

(3) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{s^2 V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)\} + 6\{sV(s) - v(0)\} + 9V(s) = \frac{3}{s+2}$$

위의 식으로부터,

$$(s^2 + 6s + 9)V(s) = sv(0) + \dot{v}(0) + 6v(0) + \frac{3}{s+2}$$

$$= s + 1 + 6 + \frac{3}{s+2}$$

$$= \frac{s^2 + 9s + 17}{s+2}$$

이므로

$$V(s) = \frac{s^2+9s+17}{(s+2)(s^2+6s+9)}$$

$$= \frac{s^2+9s+17}{(s+2)(s+3)^2}$$

$$= \frac{k_1}{s+2} + \frac{c_1}{(s+3)^2} + \frac{c_2}{s+3}$$

이다. 여기서,

$$k_1 = \frac{s^2+9s+17}{(s+3)^2}\Big|_{s=-2}$$

$$= 3,$$

$$c_1 = \frac{s^2+9s+17}{(s+2)}\Big|_{s=-3}$$

$$= 1,$$

$$c_2 = \left[\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2+9s+17}{s+2}\right\}\right]\Big|_{s=-3}$$

$$= \frac{(s+2)(2s+9) - (s^2+9s+17)}{(s+2)^2}\Big|_{s=-3}$$

$$= -2$$

이다. 즉, $V(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$V(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{2}{s+3}$$

이다. 따라서,

$$v(t) = 3e^{-2t} + te^{-3t} - 2e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

이다.

(4) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{s^2V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)\} + 4sV(s) = \frac{2}{s}$$

위의 식으로부터,

$$(s^2+4)V(s) = sv(0) + \dot{v}(0) + \frac{2}{s}$$

$$= s + 2 + \frac{2}{s}$$

$$= \frac{s^2+2s+2}{s}$$

이므로

$$V(s) = \frac{s^2+2s+2}{s(s^2+4)}$$

$$= \frac{k_1}{s} + \frac{c_1 s + c_2}{s^2+4}$$

이다. 여기서, k_1, c_1, c_2는 다음의 식으로부터 구한다.

$$k_1 = \frac{s^2+2s+2}{s^2+4}\bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{1}{2},$$

$$s^2+2s+2 = \frac{1}{2}(s^2+4) + s(c_1 s + c_2)$$

$$= (\frac{1}{2} + c_1)s^2 + c_2 s + 2$$

위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$c_1 = \frac{1}{2},$$

$$c_2 = 2$$

이어야 한다. 즉, $V(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$V(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}s + 2}{s^2 + 2^2}$$

이다. 따라서,

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t, \quad t \geq 0$$

이다.

(5) 주어진 미분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{s^2V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)\} + 2\{sV(s) - v(0)\} + 2V(s) = \frac{2}{s}$$

위의 식으로부터,

$$(s^2+2s+2)\,V(s) \;=\; sv(0)+\;\dot{v}(0)+2\,v(0)+\frac{2}{s}$$

$$=\; s+1+2+\frac{2}{s}$$

$$=\; \frac{s^2+3s+2}{s}$$

이므로

$$V(s) \;=\; \frac{s^2+3s+2}{s(s^2+2s+2)}$$

$$=\; \frac{k_1}{s} \;+\; \frac{c_1 s+c_2}{s^2+2s+2}$$

이다. 여기서, k_1, c_1, c_2는 다음의 식으로부터 구한다.

$$k_1 \;=\; \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+2}\Big|_{s=0}$$

$$=\; 1,$$

$$s^2+3s+2 \;=\; 1\times(s^2+2s+2)+s(c_1 s+c_2)$$

$$=\; (1+c_1)s^2 \;+\; (2+c_2)s \;+\; 2$$

위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$1 \;+\; c_1 \;=\; 1,$$

$$2+c_2 \;=\; 3$$

이어야 하므로,

$$c_1 \;=\; 0$$

$$c_2 \;=\; 1$$

이다. 즉, $V(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$V(s) \;=\; \frac{1}{s} \;+\; \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$=\; \frac{1}{s} \;+\; \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

이다. 따라서,

$$v(t) \;=\; 1 \;+\; e^{-t}\sin t\;,\;\; t\geq 0$$

이다.

[6.7] 다음 선형 미분적분방정식의 해 $y(t)$, $t\geq 0$를 라플라스변환을 이용하여 구하여라. 여기서, $u_s(t)$는 단위 계단함수이다.

(1) $y(t) \;+\; 3\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau \;=\; 6\,u_s(t),\quad \int_{-\infty}^{0} y(t)\,dt=1$

(2) $\dfrac{dy(t)}{dt} \;+4y(t)+4\int_{0}^{t} y(\tau)d\tau \;=\; 4u_s(t),\;\; y(0)=1$

(3) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 4\int_0^t y(\tau)d\tau = 4e^{-2t}u_s(t), \ \ y(0) = 2$

(4) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + 2\int_0^t y(\tau)d\tau = 2u_s(t) \ , \ \ y(0) = 2$

[풀이]

[6.7] $L\{y(t)\} = Y(s)$라고 하자.

(1) 라플라스변환을 적용할 수 있도록 주어진 적분방정식을 변형하면,

$$y(t) + 3\{\int_{-\infty}^0 y(\tau)\,d\tau + \int_0^t y(\tau)\,d\tau\} = 6u_s(t)$$

이고, 위의 식에 $\int_{-\infty}^0 y(t)\,dt = 1$을 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$y(t) + 3\int_0^t y(\tau)\,d\tau + 3 = 6u_s(t)$$

위의 식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$Y(s) + 3\frac{Y(s)}{s} + \frac{3}{s} = \frac{6}{s}$$

위의 식으로부터,

$$(1 + \frac{3}{s})\,Y(s) = \frac{3}{s}$$

이므로

$$Y(s) = \frac{3}{s+3}$$

이다.

따라서, $y(t) = 3e^{-3t}$, $t \geq 0$ 또는 $y(t) = 3e^{-3t}u_s(t)$ 이다.

(2) 주어진 미분적분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{sY(s) - y(0)\} + 4\,Y(s) + 4\frac{Y(s)}{s} = \frac{4}{s}$$

위의 식으로부터,

$$(s + 4 + \frac{4}{s})\,Y(s) = y(0) + \frac{4}{s}$$

$$= \frac{s+4}{s}$$

이므로

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2 + 4s + 4}$$

$$= \frac{(s+2) + 2}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

이다. 따라서,

$$y(t) \;=\; e^{-2t} \;+\; 2te^{-2t}\;, \quad t \ge 0$$

이다.

(3) 주어진 미분적분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{sY(s) - y(0)\} \;+\; 4\frac{Y(s)}{s} \;=\; \frac{4}{s+2}$$

위의 식으로부터,

$$(s + \frac{4}{s})\,Y(s) \;=\; y(0) + \frac{4}{s+2}$$

$$= \frac{2s+8}{s+2}$$

이므로

$$Y(s) \;=\; \frac{s(2s+8)}{(s+2)(s^2+4)}$$

$$= \frac{k_1}{s+2} \;+\; \frac{c_1 s + c_2}{s^2 \;+\; 4}$$

이다. 여기서, k_1, c_1, c_2는 다음의 식으로부터 구한다.

$$k_1 \;=\; \frac{s(2s+8)}{s^2+4}\Big|_{s=-2}$$

$$= -1,$$

$$2s^2 + 8s \;=\; -1\times(s^2+4) + (s+2)(c_1 s + c_2)$$

$$= (1 + c_1)s^2 \;+\; (2 + c_2)s \;+\; 2$$

위의 식이 항상 성립하기 위하여는

$$-1 \;+\; c_1 \;=\; 2,$$

$$2c_1 + c_2 \;=\; 8,$$

$$-4 + 2c_2 \;=\; 0$$

이어야 하므로,

$$c_1 \;=\; 3$$

$$c_2 \;=\; 2$$

이다. 즉, $Y(s)$를 부분분수로 전개하면,

$$Y(s) \;=\; \frac{-1}{s+2} \;+\; \frac{3s+2}{s^2+2^2}$$

이다. 따라서,

$$y(t) \;=\; -e^{-2t} \;+\; 3\cos 2t \;+\; \sin 2t\;, \quad t \ge 0$$

이다.

(4) 주어진 미분적분방정식을 라플라스변환하면 다음과 같다.

$$\{sY(s) - y(0)\} \;+\; 2\;Y(s) \;+\; 2\frac{Y(s)}{s} \;=\; \frac{2}{s}$$

위의 식으로부터,

$$\left(s+2+\frac{2}{s}\right)Y(s) = y(0)+\frac{2}{s}$$

$$= \frac{2s+2}{s}$$

이므로

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+2}$$

$$= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1^2}$$

이다. 따라서,

$$y(t) = 2e^{-t}\cos t\ ,\quad t\geq 0$$

이다.